MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

55. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 21. FEBRUAR 1952)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstraße 4.

Geschäftsführender Herausgeber:
H. Wielandt, Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebs-Vertretung des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W. C. 2.

55. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Zimmermann, Dr. W., Göttingen, Böttingerstr. 4, Max-Planck-Institut für Physik: Eine Cohomologietheorie topologischer Räume 125

Zeller, Dr. K., Tübingen, Math. Inst. der Universität: Über Stetigkeit von Integraltransformationen 167

Boas, Mr. R. P. Jr., 1725 Orrington Avenue, Evanston, Illinois (USA): Integrability of trigonometric series. II. 183

Weyl, H., Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey (USA): Kapazität von Strahlungsfeldern 187

Behrens, Dozent Dr. E. A., Hamburg 13, Nonnenstieg 24: Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie 199

Eichler, Prof. Dr. M., Münster, Rosenstr. 9: Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter 216

Grotemeyer, Dr. K. P., Göttingen, Feuerschanzengraben 15: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform 253

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 2, S. 125—166 (1952).

Eine Cohomologietheorie topologischer Räume.

Von

Wolfhart Zimmermann in Freiburg i. Br.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Einleitung 125
II. Direkte Summen von Abelschen Gruppen 131
III. Raster und Strukturgruppen 132
IV. Komplexe 135
V. Zusammenhängende Komplexe 140
VI. Cohomologiegruppen (Vorläufige Definition) 145
VII. Cohomologiegruppen (Endgültige Definition) 149
VIII. Simpliziale Abbildungen 150
IX. Äquivalente simpliziale Abbildungen 153
X. Spektren 157
XI. Überdeckungsfamilien 162
XII. Komplexe als diskrete Räume 165

I. Einleitung.

A.

In der Entwicklung der allgemeinen Topologie sind zwei Arbeiten von Čech[1]) und Alexander[2])[3]) von besonderer Bedeutung, weil in ihnen zum ersten Male die Methoden der kombinatorischen Topologie auf beliebige topologische Räume angewandt werden.

Čech geht aus von der Gesamtheit aller endlichen offenen (bzw. abgeschlossenen) Überdeckungen $\mathfrak{U}$ eines topologischen Raumes R[4]). Eine zentrale Stellung nimmt dabei der Begriff der Überdeckungsfamilie ein. Um ihn zu formulieren, benötigen wir zuerst folgende Definitionen:

---

[1]) E. Čech, Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. Fundam. math. 19 (1932), S. 149—183.

[2]) J. W. Alexander, The connectivity ring of an abstract space. Annals of Math. (2) 37 (1936), S. 698—708.

[3]) Eine zusammenfassende Darstellung der Theorien von Čech und Alexander findet sich auch bei W. Hurewicz, J. Ugundji, C. H. Dowker, Continous connectivity groups in terms of limit groups. Annals of Math. 49, 2 (1948), S. 391—406.

[4]) Zu allen Grundbegriffen der Topologie vgl. Alexandroff-Hopf, Topologie I, Berlin 1935 und N. Bourbaki, Topologie générale, Paris 1940.

Eine Überdeckung $\mathfrak{U}'$ heißt Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, wenn es zu jedem $U' \in \mathfrak{U}'$ ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt mit $U' \subset U$.

Eine eindeutige Abbildung $U' \to U$ von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$, welche $U' \subset U$ für jedes U erfüllt, nennen wir eine Projektion von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$.

Wir können jetzt eine Familie $\sum$ definieren als ein System von Überdeckungen, welches mit je zwei Überdeckungen eine gemeinsame Verfeinerung enthält. Unser nächstes Ziel ist dann, bei beliebigem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ die Homologiegruppen $\mathfrak{B}_n(\sum)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ der Familie $\sum$ zu erklären. ($\sum$, $\mathfrak{G}$ und n sind im Folgenden festzuhalten.)

Den hierzu notwendigen Übergang von topologischen zu kombinatorischen Begriffen vollzieht man dadurch, daß man jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ einen (abstrakten) Komplex — den „Nerven $N(\mathfrak{U})$" von $\mathfrak{U}$ — zuordnet: $N(\mathfrak{U})$ bestehe aus allen Simplexen

$$(U_1, \ldots, U_n) \qquad (U_i \in \mathfrak{U}),$$

deren Durchschnitt

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

nicht leer ist.

Erklärt man die n-te Homologiegruppe von $N(\mathfrak{U})$ des Koeffizientenbereichs $\mathfrak{G}$ in der üblichen Weise, so entspricht der Familie $\sum$ ein Schema von Komplexen und Gruppen, dessen Elemente untereinander in geeigneter Weise in Beziehung gesetzt werden können. Eine Projektion π von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$ erzeugt nämlich, wie sich leicht zeigen läßt, stets eine simpliziale Abbildung von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$. Diese definiert wiederum einen Homomorphismus von $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{U}')$ in $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{U})$, welcher sich als unabhängig von der speziellen Wahl der Projektion π erweist.

Auf diesem Wege gewinnen wir ein inverses System von Gruppen und Gruppenhomomorphismen, dessen Limesgruppe gerade die n-te „Čech-Homologiegruppe" der Familie $\sum$ ist.

Legt man die topologisch ausgezeichnete Familie sämtlicher endlicher offener (bzw. abgeschlossener) Überdeckungen zugrunde, so ist die resultierende n-te *Čech-Homologiegruppe von R* offenbar eine topologische Invariante.

Wir wollen noch für später die kombinatorischen Hilfsmittel, deren wir uns bedient haben, in folgenden vier Punkten festhalten:

1. Definition der Homologiegruppen eines Komplexes.

2. Definition des zu einer simplizialen Abbildung von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$ gehörigen Homomorphismus.

3. Der Nachweis, daß die von zwei Projektionen π und π' von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$ erzeugten simplizialen Abbildungen von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$ denselben Homomorphismus erzeugen.

4. Die Verknüpfung von Homologiegruppen und Homomorphismen zu einer Limesgruppe.

Wichtig ist folgender von ČECH gefundener Satz:

Ist R ein topologischer Raum, Σ' eine vollständige Teilfamilie der Familie aller endlichen offenen (bzw. abgeschlossenen) Überdeckungen von R, d. h. gibt es zu jedem $\mathfrak{U} \in \Sigma$ eine Verfeinerung $\mathfrak{U}' \in \Sigma'$, so ist die n-te Homologiegruppe von Σ' isomorph der n-ten Homologiegruppe von Σ.

Dieser Satz läßt nämlich die Beziehungen der Homologietheorie von ČECH zur gewöhnlichen kombinatorischen Topologie klar erkennen:

Ist P ein endliches Polyeder des R_n und $\mathfrak{Z}$ eine simpliziale Zerlegung von P, so ist die n-te ČECH-Homologiegruppe von P isomorph der n-ten Homologiegruppe von $\mathfrak{Z}$:

$$\mathfrak{B}_n(P) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}).$$

Wegen der Unabhängigkeit der Gruppe $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z})$ von der gewählten Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ist damit auch die topologische Invarianz der BETTIschen Gruppen erwiesen.

Das Beweisverfahren besteht darin, durch fortgesetzte baryzentrische Unterteilung von $\mathfrak{Z}$ eine Folge

$$\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_n, \ldots$$

simplizialer Zerlegungen von P zu erzeugen, von welchen man zu den entsprechenden offenen Überdeckungen $\mathfrak{U}_i$[5]) von P übergeht. Nun läßt sich zeigen, daß die Familie dieser Überdeckungen

$$\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n, \ldots$$

eine vollständige Teilfamilie des Systems aller endlichen offenen Überdeckungen von P ist.

Nach einem bekannten Satz der kombinatorischen Topologie ist weiter:

$$\mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}_i) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}_{i+1}) \quad \text{für jedes } i,$$

d. h.

$$\mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{U}_i) \quad \text{für jedes } i$$

und somit

$$\mathfrak{B}_n(P) \approx \mathfrak{B}_n(\Sigma') \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}).$$

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen der Theorie von ČECH und der Theorie der abgeschlossenen Mengen von P. ALEXANDROFF.

J. W. ALEXANDER schlägt einen etwas anderen Weg ein: Zunächst wird der Begriff des Komplexes wesentlich allgemeiner gefaßt: Ein (symbolischer) Komplex ist ein beliebiges System von Simplexen, d. h. endlichen Teilmengen einer Menge M, welches mit jedem Simplex dessen sämtliche Teilmengen enthält. ALEXANDER gibt dann für diese allgemeinen Komplexe eine Definition der n-ten Cohomologiegruppe des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{G}$ ($n = 1, 2, \ldots$).

[5]) Bekanntlich ist der Nerv von $\mathfrak{U}_i$ dem Komplex der Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ isomorph: $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{U}_i) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}_i)$.

Zur topologischen Anwendung werden nun alle offenen Überdeckungen eines topologischen Raumes R herangezogen. Um die n-te Cohomologiegruppe von R zu erklären, kann man jetzt ähnlich wie in der Homologietheorie von Čech vorgehen, wenn man nur — und hierin liegt der wesentliche Unterschied gegenüber der Theorie von Čech — jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ den Komplex entsprechen läßt, der aus allen endlichen Teilmengen von R besteht, welche in mindestens einem Element von $\mathfrak{U}$ enthalten sind.

B.

Zur Beschreibung beliebiger topologischer Räume (insbesondere von Räumen transfiniter Dimension, z. B. Punktmengen des Hilbertschen Raumes) erscheint in der Homologietheorie von Čech die Beschränkung auf endliche Überdeckungen unnötig speziell. Ähnliches gilt für die Alexandersche Theorie: in ihr werden ausschließlich endliche Teilmengen von R verwendet. Dieser Nachteil kommt auch darin zum Ausdruck, daß in beiden Theorien zur Charakterisierung topologischer Räume nur abzählbar unendlich viele Gruppen zur Verfügung stehen.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, eine Cohomologietheorie topologischer Räume zu begründen, in welcher derartige Endlichkeitsbeschränkungen wegfallen, und welche außerdem die Theorien von Čech und Alexander in sich schließt.

Vor der eigentlichen Inhaltsangabe werden zuerst — aufbauend auf die Homologietheorie von Čech — die Grundgedanken der Arbeit skizziert.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Gesamtheit aller offenen (bzw. abgeschlossenen) Überdeckungen eines topologischen Raumes R und versuchen uns zunächst möglichst eng an den Gedankengang von Čech anzulehnen.

Die in Abschnitt A für endliche Überdeckungen gegebenen Definitionen der Begriffe Verfeinerung, Projektion, Familie und vollständige Teilfamilie lassen sich wörtlich übertragen.

Damit wir nun wieder jeder Überdeckung einen Komplex zuordnen können, müssen wir den Begriff des Komplexes erst der allgemeinen Natur der in Betracht gezogenen Überdeckungen anpassen. Wir definieren deshalb einen simplizialen Komplex als ein beliebiges System von Simplexen, d. h. Teilmengen einer Menge M, welches mit jedem Simplex dessen sämtliche Teilmengen enthält. Der Überdeckung $\mathfrak{U}$ kann auf zwei verschiedene Arten ein simplizialer Komplex zugeordnet werden:

I. Wir bilden den Nerven $N_I(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{U}$. Seine Simplexe sollen solche Mengen s von Elementen U der Überdeckung $\mathfrak{U}$ sein, deren Durchschnitt

$$\bigcap_{U \in s} U$$

nicht leer ist.

II. Der Komplex $N_{II}(\mathfrak{U})$ soll dagegen aus allen Teilmengen s von R bestehen, zu welchen es ein Überdeckungselement $U \in \mathfrak{U}$ gibt, in dem s enthalten ist.

Beim Verfahren I wird der zu $\mathfrak{U}$ gehörige Komplex, was dem Vorgang von Čech entspricht, aus den Überdeckungselementen von $\mathfrak{U}$ konstruiert, während die zweite Art, deren Vorbild die Alexandersche Methode ist, dem Komplex $N_{II}(\mathfrak{U})$ die Punkte des Raumes R selbst zugrundelegt.

Man könnte nun wie in der Homologietheorie von Čech fortfahren und jedem Komplex $N_{I \text{ bzw. } II}(\mathfrak{U})$ eine Cohomologiegruppe zuordnen; es empfiehlt sich aber — besonders weil hierdurch beide Verfahren I und II auf dieselbe Art beschrieben werden können — anders vorzugehen und zunächst dem topologischen Begriff der Familie den rein kombinatorischen Begriff eines „Spektrums" von Komplexen gegenüberzustellen. Zu seiner Erklärung brauchen wir folgende Definitionen:

Sind K' und K Komplexe, die auf den Mengen M' und M erklärt sind, so sagen wir, die eindeutige Abbildung von M' in M erzeuge eine simpliziale Abbildung von K' in K, wenn die Bildmenge eines jeden Simplexes von K' Simplex von K ist.

Zwei simpliziale Abbildungen π_1 und π_2 von K' in K heißen äquivalent, wenn die Vereinigungsmenge der durch π_1 und π_2 erzeugten Bildsimplexe des beliebigen Simplexes s von K' als Simplex zu K gehört. (Die Bedeutung dieser Definition liegt in folgender Eigenschaft: Ist $\mathfrak{U}'$ Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, wofür wir $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}'$ schreiben wollen, und sind π_1 und π_2 Projektionen von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$, so erzeugen π_1 und π_2 äquivalente simpliziale Abbildungen von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$.)

Unter einem Spektrum $\sum$ verstehen wir nun eine beliebige, durch eine Relation $\leqq$ teilweise geordnete, gerichtete Menge[6]). ($\sum$ hat den Charakter einer Indexmenge und vertritt die Familie.) Jedem Element e von $\sum$ ist ein Komplex $K(e)$ zugeordnet; zu je zwei Elementen $e < e'$ gehört ein System untereinander äquivalenter simplizialer Abbildungen von $K(e')$ in $K(e)$, welche Projektionen genannt werden.

Das vollständige Teilspektrum wird ganz analog der vollständigen Teilfamilie erklärt.

Gelingt uns jetzt für beliebige Spektren die geeignete Einführung von Cohomologiegruppen, so ist bis zu deren Definition für beliebige Familien nur ein Schritt. Denn dazu ist allein erforderlich, die durch die Verfeinerungsrelation $\leqq$ teilweise geordnete Familie $\sum$ zu einem Spektrum zu ergänzen, was jetzt in doppelter Weise geschehen soll:

I. Jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $\sum$ wird als Komplex ihr Nerv $N_I(\mathfrak{U})$ zugeordnet. Zu je zwei Überdeckungen $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}'$ gehöre das System der Projektionen π von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$. (Diese erzeugen ja äquivalente simpliziale Abbildungen von $N_I(\mathfrak{U}')$ in $N_I(\mathfrak{U})$.)

[6]) „Gerichtet" heißt: Es soll zu je zwei Elementen $e_1 \in \sum$ und $e_2 \in \sum$ ein Element $e \in \sum$ geben mit $e_1 \leqq e$ und $e_2 \leqq e$.

II. Jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ wird der Komplex $N_{II}(\mathfrak{U})$ zugeordnet. Den Überdeckungen $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}'$ entspreche die identische Abbildung von R in sich als einzige Projektion.

Als Cohomologiegruppen I und II einer Überdeckungsfamilie $\sum$ sind dann die Cohomologiegruppen des nach I und II gebildeten Spektrums anzusprechen.

C.

Mit dem Ziel, die Cohomologiegruppen eines beliebigen Spektrums von Komplexen zu erklären, wird nun im ersten Teil der Arbeit (Abschnitt I bis IX) eine rein kombinatorische (d. h. von topologischen Begriffsbildungen freie) Cohomologietheorie simplizialer Komplexe entwickelt. Dies geschieht in vier Schritten, welche etwa den vier Punkten auf Seite 126 entsprechen:

1. Zu jedem Komplex K wird eine Cohomologiegruppe erklärt, die in eindeutiger Weise als direkte Summe einer im allgemeinen transfiniten Anzahl von Gruppen — den „Gliedern" der direkten Summe — dargestellt ist[7]). (Abschnitte I—VI.)

Der Inhalt der einzelnen Abschnitte ist:

I enthält die für das Folgende zweckmäßige Definition der direkten Summe von Abelschen Gruppen nach N. Bourbaki.

In II werden „Raster" — mit einer „Nachbarrelation" versehene Mengen — behandelt. Axiomatisch werden für Raster Strukturgruppen eingeführt, die in Abschnitt V beim Übergang zu Komplexen, welche als Sonderfälle der Raster aufzufassen sind, zu Cohomologiegruppen spezialisiert werden.

III handelt von den allgemeinen Eigenschaften der Komplexe. Diese werden dabei noch etwas allgemeiner, nämlich als beliebige Mengensysteme definiert.

In IV folgen einige Sätze über zusammenhängende Komplexe, die in V nutzbar gemacht werden: Für einen speziellen Typ von Komplexen wird die Definition der Cohomologiegruppe unter Anwendung der in II entwickelten Begriffe gegeben. (V.)

VI enthält die durch IV und V vorbereitete endgültige Definition der Cohomologiegruppe. Diese bezieht sich — in Analogie zu den Lefschetzschen Relativzyklen — auf Tripel $Q \subset P \subset K$ von Komplexen. Die gewöhnlichen Cohomologiegruppen von K erhält man, wenn man Q gleich der leeren Menge und $P = Q$ setzt. Diese Verallgemeinerung ist auch in den Abschnitten VII bis X durchgeführt.

2. Ist π eine simpliziale Abbildung des Komplexes K' in den Komplex K, so wird für entsprechende Glieder $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}$ der Cohomologiegruppe von K' und K ein Homomorphismus von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}'$ definiert. (Abschnitt VII.)

---

[7]) Die Glieder entsprechen den einzelnen Gruppen $\mathfrak{B}_n(K)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bei endlichem Komplex K.

3. Es wird bewiesen, daß äquivalente simpliziale Abbildungen für entsprechende Glieder der Cohomologiegruppen denselben Homomorphismus erzeugen. (Abschnitt VIII.)

4. Durch Verknüpfung der Cohomologiegruppen der Komplexe eines Spektrums $\sum$ untereinander werden die Cohomologiegruppen von $\sum$ selbst definiert. (Abschnitt IX.) Es wird außerdem bewiesen, daß die Cohomologiegruppe eines vollständigen Teilspektrums $\sum'$ von $\sum$ „gliedweise" isomorph der Cohomologiegruppe von $\sum$ ist.

Die Abschnitte X und XI enthalten die topologischen Anwendungen. In X werden eine Reihe topologisch ausgezeichneter Überdeckungsfamilien aufgezählt. Zu jeder solchen Familie $\sum$ gehören zwei Spektren und somit zwei Arten topologischer Invarianten.

Hervorgehoben seien:

Die Familie $\sum_0$, die sich aus allen offenen Überdeckungen von R zusammensetzt.

Die Familie Γ_0 aller endlichen offenen Überdeckungen, welches, wenn man nach Art I verfährt, die Cohomologietheorie von Čech zurückliefert.

Die Cohomologietheorie von Alexander erhält man, wenn man $\sum_0$ nach II behandelt und nur die zur „Nullschichtung" von $\sum_0$ gehörigen Glieder der Cohomologiegruppe berücksichtigt.

Weiter wird bewiesen (Satz 33): Ist $\sum'$ vollständige Teilfamilie von $\sum$, so ist die Cohomologiegruppe von $\sum'$ gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe von $\sum$.

Dieser Satz der Homologietheorie von Čech gilt also unverändert. Er wird sogleich angewandt, indem gezeigt wird, daß für bikompakte Räume $\sum_0$ dieselben topologischen Invarianten wie Γ_0 liefert.

In XI werden simpliziale Komplexe als diskrete Räume aufgefaßt. Mit Hilfe von Satz 33 wird bewiesen, daß die mit $\sum_0$ nach I definierte Cohomologiegruppe eines Komplexes mit der auf kombinatorischem Wege erklärten Cohomologiegruppe von K übereinstimmt. Ferner wird gezeigt (unter nochmaliger Anwendung von Satz 33), daß die (Co)-Homologietheorie von Čech nur über die Struktur von K in seinen endlichen Simplexen eine Aussage machen kann.

II. Direkte Summen von Abelschen Gruppen.

Es sei W eine beliebige Menge, S eine Menge von Abelschen Gruppen und $\mathfrak{A}$ eine eindeutige Abbildung von W in S: Jedem Element $w \in W$ ist eindeutig eine Gruppe $\mathfrak{A}(w)$ zugeordnet; wir definieren eine Gruppe, nämlich die zu $\mathfrak{A}$ gehörige *direkte Summe*: $\mathfrak{H} = \sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$.

Ihre Elemente sollen die Funktionen F sein, die jedem $w \in W$ ein Gruppenelement $g \in \mathfrak{A}(w)$ zuordnen. Ordnet F dem Element w das Element g zu, so schreiben wir

$$g = F\,w.$$

Wir denken uns die Gruppen von S alle additiv geschrieben und addieren zwei Funktionen $F_1 \in \mathfrak{H}$, $F_2 \in \mathfrak{H}$ zu einer Funktion $F_1 + F_2$, indem wir für jedes $w \in W$ die Relation

$$(F_1 + F_2)\, w = F_1\, w + F_2 w$$

vorschreiben.

Durch diese Vorschrift haben wir $\mathfrak{H}$ zu einer Abelschen Gruppe gemacht, der direkten Summe $\sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$.

Mit dieser Definition läßt sich ein bekannter Satz über direkte Summen Abelscher Gruppen so formulieren:

Satz 1. *Sind* $\sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$ *und* $\sum_{w \in W} \mathfrak{A}'(w)$ *direkte Summen Abelscher Gruppen, und gilt für jedes* $w \in W$

$$\mathfrak{A}'(w) \subset \mathfrak{A}(w),$$

so ist

$$\sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w) / \sum_{w \in W} \mathfrak{A}'(w) \approx \sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w) / \mathfrak{A}'(w).$$

Sind $\mathfrak{H} = \sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$ und $\mathfrak{H}' = \sum_{w \in W'} \mathfrak{A}'(w)$ zwei direkte Summen und J eine ein-eindeutige Abbildung von W auf W', dann heißt $\mathfrak{H}'$ gliedweise isomorph mit $\mathfrak{H}$ bezüglich J, wenn $\mathfrak{A}(w) \approx \mathfrak{A}(w')$ ist $(w' = J w)$.

Zwei gliedweise isomorphe Summen sind natürlich isomorph.

III. Raster und Strukturgruppen.

In der Menge K sei eine Relation $|$ eingeführt: Zwischen je zwei Elementen s und t aus K soll die Relation $|$ bestehen oder nicht. $|$ sei symmetrisch: $s|t$ habe $t|s$ zur Folge. Gilt $s|t$, so sollen s und t Nachbarn heißen. $|$ nennen wir auch eine *Nachbarrelation*. In Verbindung mit der Relation $|$ bezeichnen wir die Menge K als *Raster*. Ist K' Teilmenge von K, so induziert $|$ in K' eine ebenfalls symmetrische Relation, für welche wir auch das Symbol $|$ verwenden. K' heiße zusammen mit dieser Relation ein Unterraster von K.

Durch den Begriff des Weges gewinnen wir eine Komponentenzerlegung des Rasters K: Die endliche geordnete Menge $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ mit s_i als Element von K und $n \geqq 1$ heißt ein *Weg* von s bis t in K, wenn $s_1 = s$, $s_n = t$ und s_i, s_{i+1} für jedes i Nachbarn sind. Wir schreiben $s \| t$ genau dann, wenn es einen Weg in K gibt, der s mit t verbindet. Diese Relation ist reflexiv, transitiv und symmetrisch. Sie definiert also eine Klasseneinteilung von K in zueinander fremde Klassen.

Jede solche Klasse heißt eine Komponente von K. K heißt zusammenhängend, wenn K selbst Komponente ist.

Die ein-eindeutige Abbildung J des Rasters K auf den Raster K' heißt eine Isomorphie, wenn aus

$$s|t \text{ die Beziehung } Js\, Jt,$$

und umgekehrt aus

$$Js \mid Jt \text{ die Beziehung } s \mid t$$

folgt.

Wir versuchen jetzt für den Raster K den Begriff der *Kette* zu definieren. $\mathfrak{G}$ sei eine additiv geschriebene Abelsche Gruppe. Wir ordnen jedem Element von K die Gruppe $\mathfrak{G}$ zu und bilden die zu dieser Abbildung gehörige direkte Summe $\mathfrak{L}$. Ihre Elemente heißen Ketten auf K mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Das Nullelement von $\mathfrak{L}$ ordnet allen Elementen von K den Wert Null zu. Es wird als Nullkette 0 auf K bezeichnet.

Unter dem Grundraster einer Kette A verstehen wir die Menge aller Elemente von K, für welche $As \neq 0$ ist. Ist K' Unterraster von K, so bilden alle Ketten auf K, deren Grundraster in K' enthalten ist, eine Untergruppe von $\mathfrak{L}$, die Gruppe $\mathfrak{L}_{K'}$ der Ketten von K auf K'. Jede Kette A auf K' im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ läßt sich in trivialer Weise zu einer Kette A^* auf K ergänzen:

Wir setzen

$$A^*s = As, \text{ wenn } s \in K',$$

und

$$A^*s = 0, \text{ wenn } s \notin K'$$

ist.

Diese Zuordnung bildet offenbar die Gruppe $\mathfrak{L}(K')$ aller Ketten auf K' im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ isomorph auf $\mathfrak{L}_{K'}$ ab.

Wir definieren eine *allgemeine Randbildung* a auf K im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ als einen Homomorphismus von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}$, der folgenden Bedingungen genügt:

(α) Die Bildgruppe $\mathfrak{H}(K, a)$ von $\mathfrak{L}$ sei Untergruppe des Kerns $\mathfrak{Z}(K, a)$ von a:

$$aaA = 0 \text{ für jede Kette } A \text{ auf } K.$$

$\mathfrak{H}(K, a)$ heiße a-Rändergruppe von K, jedes Element von ihr ein a-Rand von K. $\mathfrak{Z}(K, a)$ heiße die a-Zyklengruppe, jedes Element von ihr ein *a-Zyklus* von K.

(β) Sind A und B Ketten auf K, dann soll die Gleichung

$$aAs = aBs$$

gelten, wenn $As' = Bs'$ für jeden Nachbar s' von s erfüllt ist.

Aus (β) kann man folgern: Es ist $aAs = 0$, wenn $As' = 0$ für jeden Nachbar s' von s ist. Denn, da a ein Homomorphismus ist, wird die Nullkette auf sich abgebildet: $aAs = aOs = 0$.

Mit Hilfe von (α) definieren wir die zur Randbildung a gehörige *Strukturgruppe* von K als Faktorgruppe von $\mathfrak{Z}(K, a)$ nach $\mathfrak{H}(K, a)$:

$$\mathfrak{B}(K, a) = \mathfrak{Z}(K, a)/\mathfrak{H}(K, a).$$

Ist L Komponente von K, so läßt sich sofort eine allgemeine Randbildung $a(L)$ von L aus der allgemeinen Randbildung a von K gewinnen:

Ist A Kette auf L und zur Kette A^* auf K ergänzt, so setzen wir für jedes Element s von L

$$a(L)\,A\,s = a\,A^*s.$$

$a(L)$ bildet die Gruppe $\mathfrak{L}(L)$ in sich ab. Bedingung (α) ist erfüllt. Wir weisen Bedingung (β) nach: Ist $s \in L$, so liegt auch jeder Nachbar s' von s in L. Gilt also $As' = Bs'$ für jeden Nachbar von $s \in L$, so folgt die Beziehung $A^*s' = B^*s'$. Deshalb ist: $aA^*s = aB^*s$, und somit wird $a(L)\,As = a(L)\,Bs$.

Satz 2. $K = \bigcup_{L \in W} L$ *sei die Komponentenzerlegung eines Rasters* K. *Dann ist die Strukturgruppe von* K *bezüglich* a *isomorph der direkten Summe der Strukturgruppen der einzelnen Komponenten* L *bezüglich* $a(L)$:

$$\mathfrak{B}(K, a) \approx \sum_{L \in W} \mathfrak{B}(L, a(L)).$$

(W sei die Menge aller Komponenten von K.)

Beweis. Ist A eine Kette auf K, so definieren wir eine Kette $A(L)$ auf L durch

$$A(L)s = A\,s \qquad (s \in L).$$

Für jedes $s \in L$ gilt $a(L)\,A(L)s = a\,A\,s$. Denn jeder Nachbar s' von s gehört zu L, d. h. $A(L)s' = A\,s' = A(L)^*\,s'$, woraus nach ($\beta$)

$$a(L)\,A(L)\,s = a\,A(L)^*\,s^* = a\,A\,s$$

folgt.

Zu jeder Komponente L von K sei eine Kette A_L auf L vorgegeben. Wir definieren eine Kette

$$A = \sum_{L \in W} A_L$$

auf K durch die Festsetzung

$$A\,s = A_L\,s,$$

wenn $s \in L$ ist. Es ist stets $A_L = A(L)$.

1. Ist A ein a-Zyklus auf K, so ist $A(L)$ $a(L)$-Zyklus auf L ($L \in W$). Denn es ist

$$a(L)\,A(L)\,s = a\,A\,s = 0 \qquad (s \in L).$$

2. Ist in dem Ausdruck $\sum_{L \in W} A_L$ jede Kette A_L $a(L)$-Zyklus auf L, so ist $A = \sum_{L \in W} A_L$ a-Zyklus auf K. Denn es wird

$$a\,A\,s = a(L)\,A(L)s = a(L)\,A_L s = 0 \qquad (s \in L).$$

3. Wir konstruieren einen Isomorphismus l von $\mathfrak{Z}(K)$ auf $\sum_{L \in W} \mathfrak{Z}(L)$:

Dem a-Zyklus A ordnen wir das durch $EL = A(L)$ ($L \in W$ beliebig gewählt) definierte Element E von $\sum_{L \in W} \mathfrak{Z}(L)$ zu.

4. Ist A a-Rand, so ist für jedes $L \in W$ $A(L)$ $a(L)$-Rand auf L. Denn aus $A = aB$ folgt

$$A(L)s = As = aBs = a(L)B(L)s \qquad (s \in L).$$

5. $A = \sum_{L \in W} A_L$ ist a-Rand auf K, wenn jedes A_L $a(L)$-Rand auf L ist. Ist nämlich für jedes L

$$A_L = a(L)B_L,$$

und setzen wir

$$B = \sum_{L \in W} B_L,$$

so wird

$$aBs = a(L)B(L)s = a(L)B_L s = A_L s = As \qquad (s \in L).$$

Der Isomorphismus I induziert also einen Isomorphismus I' von $\mathfrak{H}(K)$ auf $\sum_{L \in W} \mathfrak{H}(L)$.

Wegen $\mathfrak{H}(L) \subset \mathfrak{Z}(L)$ und $\mathfrak{H}(K) \subset \mathfrak{Z}(K)$ folgt nach Satz 1

$$\mathfrak{Z}(K)/\mathfrak{H}(K) \approx \sum_{L \in W} \mathfrak{Z}(L)/\mathfrak{H}(L).$$

Ist für jede Komponente von K eine allgemeine Randbildung a_L vorgegeben, so lassen sich diese folgendermaßen zu einer allgemeinen Randbildung $a = \sum_{L \in W} a_L$ von K zusammensetzen: Für jedes Element s setzen wir $aAs = a_L A_L s$ fest, sofern s in L liegt. Für a gilt die Beziehung $a(L) = a_L$.

J sei eine Isomorphie des Rasters K auf den Raster K'. Wir benützen sie, um sämtliche Randbildungen und zugehörige Strukturgruppen der beiden Raster aufeinander ein-eindeutig abzubilden: Zunächst entspreche jeder Kette A auf K die durch $(JA)(Js) = As$ bestimmte Kette JA auf K'. Die allgemeine Randbildung Ja sei durch

$$(Ja)(JA)(Js) = aAs$$

definiert. Es ist einfach zu zeigen, daß beide Axiome für Ja erfüllt sind. $J\mathfrak{B}(K, a) = \mathfrak{B}(K', Ja)$ ist isomorph der Gruppe $\mathfrak{B}(K, a)$.

IV. Komplexe.

M sei eine beliebige Menge. Ist Q eine beliebige nichtleere Teilmenge von M, so sei $\{Q\}$ das System aller Teilmengen von Q. Wir nennen ein beliebiges nichtleeres Teilsystem K von $\{M\}$ einen *Komplex* auf M. Die Elemente von $\{M\}$ heißen auch *Simplexe*, die Elemente von M Eckpunkte. Entsprechend trägt M auch den Namen Eckpunktbereich. Das Simplex s heißt Seite des Simplexes t, wenn $s \subset t$ ist.

Das Simplex s' von s heißt *Nachbar* von s, in Zeichen: $s \mid s'$, wenn die Menge $s \cup s' \vdash (s \cap s')$ [8]) genau ein Element enthält. Notwendig und hinreichend für $s \mid s'$ ist die Existenz eines Elementes $a \in M$, so daß

$$s = s' \cup (a),\ a \notin s' \text{ oder } s' = s \cup (a),\ a \notin s$$

ist. Diese Definition ist durch die Symmetrie von $\mid$ gerechtfertigt. Das *Bindeglied* der Nachbarn s und s' ist der Eckpunkt, um welchen sich s und s' unterscheiden.

Nun folgen noch einige Definitionen spezieller Komplexe: Ein Komplex heißt *endlich*, wenn er nur endlich viele Simplexe besitzt. Ein Komplex heißt *finit*, wenn alle seine Simplexe endliche Mengen sind. Ein *simplizialer Komplex* enthalte mit jedem Simplex dessen sämtliche Seiten.

Der von dem Komplex K auf M erzeugte Eckpunktbereich $\mathfrak{K}$ soll aus allen Eckpunkten von M bestehen, die mindestens in einem Simplex von K vorkommen.

Zwei Komplexe K auf M und K' auf M' heißen isomorph, wenn es eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{K}'$ gibt, so daß jedes Simplex von K auf ein Simplex von K' abgebildet wird und umgekehrt.

$\{M\}$ wird durch die Nachbarrelation $\mid$ zu einem Raster. Im folgenden fassen wir jeden Komplex K auf M als einen Unterraster von $\{M\}$ auf.

Sind s und t Simplexe von $\{M\}$, und gibt es einen Weg in $\{M\}$, der s und t verbindet, so heißt das

$$t = s \cup q_1 \vdash q_2,\ q_1 \cap s = 0 \text{ und } q_2 \subset s,$$

wobei q_1 und q_2 endliche Mengen aus $\{M\}$ sind. Ist umgekehrt

$$t = s \cup q_1 \vdash q_2,\quad q_1 \text{ und } q_2 \text{ endlich},$$

so folgt $s \parallel t$ in M. Daher gilt

Satz 3. *Für $s \parallel t$ in $\{M\}$ ist notwendig und hinreichend, daß $s \vdash (s \cap t)$ und $t \vdash (s \cap t)$ endliche Mengen sind.*

Die Komponenten von $\{M\}$ heißen auch *Schichten* von M. Jede Komponente von K ist ganz in einer Schicht von M enthalten. Die Nullschicht, d. h. diejenige Schicht von M, welche die leere Menge enthält, besteht aus allen endlichen Teilmengen von M. Sie wird mit O_M bezeichnet.

Ein Komplex heißt in der Schicht S simplizial, wenn er mit jedem Simplex $s \in K \cap S$ dessen sämtliche Seiten enthält, sofern sie in der Schicht S gelegen sind. Ist der Komplex K simplizial, so ist K in jeder Schicht von M simplizial.

Wir schreiben $S' \leqq S$, wenn es Simplexe $s' \in S'$, $s \in S$ gibt mit $s' \subset s$. Ist $S' \leqq S$, so gibt es zu jedem $s' \in S'$ ein $s \in S$ mit $s' \subset s$.

Jede Menge U von Schichten von M heißt eine *Schichtung* von M.

---

[8]) Ist B Teilmenge von A, so bezeichne $A \vdash B$ die Differenzmenge von A und B.

Satz 4. *Ist der Komplex K simplizial und S eine Schicht, so ist K in S simplizial und $K \cap S$ entweder leer oder eine Komponente von K.*

Beweis. Wir machen die Annahme, $K \cap S$ sei nicht leer. Sind s_1, s_2 zwei Simplexe aus $K \cap S$, dann ist $s_1 \cap s_2 \in K$ und $s_1 \cap s_2 \in S$.

Wir ordnen die Elemente von $s_1 \vdash (s_1 \cap s_2)$ und $s_2 \vdash (s_1 \cap s_2)$ irgendwie an:

$$s_1 \vdash (s_1 \cap s_2) = (a_1, \ldots, a_n)$$
$$s_2 \vdash (s_1 \cap s_2) = (b_1, \ldots, b_n)$$

und setzen

$$t_i = s_1 \cap s_2 \cup (a_1, \ldots, a_i)$$
$$t_i' = s_1 \cap s_2 \cup (b_1, \ldots, b_i).$$

Dann ist

$$s_1 = t_n, \ldots, t_1, \; s_1 \cap s_2, \; t_1', \ldots, t_n' = s_2$$

ein Weg in $K \cap S$, der s_1 mit s_2 verbindet.

Eine endliche geordnete Menge, welche mehrfache Elemente besitzen darf, heißt ein orientiertes Simplex von F, wenn die Menge aller ihrer Elemente ein Simplex von F ist. Oder genauer: Ein $(n-1)$-dimensionales orientiertes Simplex (orientiertes $(n-1)$-Simplex) ist eine eindeutige Abbildung der Folge $1, \ldots, n$ natürlicher Zahlen in M, wenn ihre Bildmenge Simplex von F ist. Als (-1)-dimensionales Simplex von F bezeichnen wir die leere Menge.

Die Menge aller orientierten Simplexe von F nennen wir den zu F gehörigen orientierten Komplex F^*. Wir wenden folgende Schreibweise für orientierte Simplexe an: $(a_1, \ldots, a_n)$ bezeichne die Abbildung der Folge $1, \ldots, n$ in die Menge M, die jeder ganzen Zahl $1 \leqq i \leqq n$ das Element $s_i \in M$ zuordnet.

K sei ein beliebiger Komplex. Unter einem *Block* B von K verstehen wir einen Teilkomplex von K, der folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1. Zu je zwei Elementen $s \subset s'$ von B enthält B alle Zwischenelemente t von s und s': $s \subset t \subset s'$.

2. Mit je zwei Elementen t und t' gehören Durchschnitt und Vereinigung beider Elemente B an.

Ein Block B von K heißt *Maximalblock* von K, wenn es außer B selbst keinen Komplex gibt, der B enthält und Block von K ist.

Sind q und q' beliebige Simplexe auf M, so bildet die Menge aller Simplexe t auf M mit $q \subset t \subset q'$ einen Block des Komplexes $\{M\}$, den von den „Enden" q und q' erzeugten Block. Ist $Q \subset M$, so ist $\{Q\}$ ein Block von $\{M\}$, der von den Enden O und Q erzeugt wird.

Satz 5. *Ein Block von $\{M\}$ ist dann und nur dann simplizial, wenn er das leere Simplex enthält.*

Beweis Der Block B enthalte das leere Simplex. Ist $s \in B$ beliebig gewählt, so muß jedes Simplex t mit

$$O \subset t \subset s,$$

also jede Seite von s zu B gehören.

Wenn B simplizial und $s \in \mathfrak{B}$ ist, so ist die leere Menge Seite von s, also in B enthalten.

Im Folgenden bezeichnen wir die Vereinigungsmenge aller Simplexe eines Komplexes K mit $V(K)$, den Durchschnitt mit $D(K)$.

Satz 6. *Ist Q eine Menge von Blöcken, so ist der Durchschnitt D aller Elemente von Q auch ein Block.*

Beweis.

1. Ist $s' \subset s''$ und $s' \in D$, $s'' \in D$, so enthält jeder Block von Q jedes t mit $s' \subset t \subset s''$, also $t \in D$.

2. Zu s' und s'' enthält jeder Block von Q auch $s' \cap s''$ und $s' \cup s''$. Also ist

$$s' \cup s'' \in D, \; s' \cap s'' \in D.$$

Satz 7. *Q sei eine Menge von Blöcken des Komplexes K, die durch die Relation $\subset$ vollständig geordnet ist. Dann ist die Vereinigungsmenge $V(Q)$ wieder ein Block.*

Beweis. Sind s, s' beliebige Simplexe von $V(Q)$, $s \in B_1 \in Q$, $s' \in B_2 \in Q$ und etwa $B_1 \subset B_2$, also: $s \in B_2$, so heißt das:

1. Jedes Simplex t mit $s \subset t \subset s'$ liegt in $B_2 \subset V(Q)$, sofern überhaupt $s \subset s'$ ist.

2. $s \cap s'$ und $s \cup s'$ liegen in $B_2 \subset V(Q)$, w. z. b. w.

Satz 8. *In einem beliebigen Komplex K gibt es zu jedem Block B wenigstens einen Maximalblock von K, in welchem B enthalten ist.*

Beweis. Die Menge W aller Blöcke von K ist durch die Relation $\subset$ nach Satz 7 induktiv teilweise geordnet. Also gibt es in der Menge W nach dem Zornschen Satz mindestens einen Maximalblock, der B enthält.

Weil jedes Simplex s von K selbst ein Block ist, folgt: Zu jedem Simplex s gibt es wenigstens einen Maximalblock, der s enthält.

Satz 9. *Ist S eine Schicht von M und der Block $B \subset S$ in S simplizial, dann ist $D(B) = O$.*

Beweis. Es sei a ein beliebiges Element von M, welches in einem $s \in B$ enthalten ist. Dann ist $s \vdash a$ Simplex von B und

$$a \notin D(B).$$

Satz 10. *Ist der Komplex K in der Schicht S simplizial, dann ist jeder Maximalblock B von $K \cap S$ in S simplizial; nach Satz 9 ist dann also $D(B) = O$.*

Beweis. B sei ein Maximalblock. Wir bilden die Menge $\tilde{B}$ aller Simplexe von S, welche Seite irgendeines Simplexes von B sind. $\tilde{B}$

ist ein Block und simplizial in S. Wegen $\tilde{B} \subset K \cap S$ und der Maximalität von B gilt

$$\tilde{B} = B.$$

Satz 11. *Sei B ein zusammenhängender Block, gelegen in der Schicht S, so besteht B aus allen Simplexen t, die den Relationen*

$$D(B) \subset t \subset V(B),\ t \in S$$

genügen.

Beweis. Es sei $a \in V(B) \vdash D(B)$. Wir zeigen: Es gibt zu jedem Simplex s von B ein Nachbarsimplex, welches mit s zusammen das Bindeglied a besitzt.

Es sei $a \notin s$. Es gibt mindestens ein t in B mit $a \in t$. Aus den Relationen

$$s \subset s \cup a \subset s \cup t$$

folgert man, daß $s \cup a$ zu B gehört.

Ist aber a Element von s, so wählen wir ein $t \in B$, welches $a \notin t$ erfüllt. In diesem Falle ist

$$s \cap t \subset s \vdash a \subset s,$$

oder $s \vdash a \in B$.

Durch vollständige Induktion kann man ohne weiteres ableiten, daß mit s auch

$$t = (s \cup m) \vdash n$$

zu B gehört; wenn m und n endliche Teilmengen von $V(B) \vdash D(B)$ sind und $n \subset s$, $s \cap m = 0$ ist.

Ist t ein beliebiges Simplex, welches

$$D(B) \subset t \subset V(B),\ t \in S$$

erfüllt, so greifen wir aus B irgendein Simplex s heraus. Es sind $t \vdash (t \cap s)$ und $s \vdash (s \cap t)$ endliche Mengen. Ferner gilt die Gleichung

$$t = (s \vdash (s \vdash t \cap s)) \cup (t \vdash t \cap s).$$

Also muß mit s auch t Simplex von B sein.

Jedes Simplex t von B erfüllt definitionsgemäß die Relationen

$$D(B) \subset t \subset V(B),\ t \in S.$$

Satz 12. *Ist B ein in der Schicht S simplizialer zusammenhängender Block, so ist*

$$B = \{V(B)\} \cap S.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 9 und 11. Mit Satz 12 folgert man: Ist Q Teilmenge von M, so gibt es höchstens einen zusammenhängenden Block B mit $V(B) = Q$, der in der Schicht S simplizial ist.

Die nun folgenden Abschnitte V und VI sollen auf den Abschnitt VII vorbereiten, in welchem die Cohomologiegruppe eines Komplexes endgültig und formal unabhängig von V und VI definiert wird.

V. Zusammenhängende Komplexe.

Eine *Bindungsisomorphie* ist eine eindeutige Abbildung J eines zusammenhängenden Komplexes L auf einen zusammenhängenden Komplex L', die folgende Bedingungen erfüllt:

Aus $s \mid t$ und „a ist Bindeglied von s und t" soll folgen:

$s' \mid t'$ und „a ist Bindeglied von s' und t'" mit $s' = Js$, $t' = Jt$.

Ist $N \subset L$, so induziert die Bindungsisomorphie J von L auf L' eine Bindungsisomorphie von N auf die Menge JN aller Simplexe von L', welche ein Urbild in N besitzen.

Satz 13. *Jede Bindungsisomorphie J ist ein-eindeutig. Die Abbildung J^{-1} ist ebenfalls eine Bindungsisomorphie.*

Beweis. Zunächst definieren wir zu jedem Weg

$$W = (s_1, \ldots, s_n) \text{ in } M$$

und jedem Element a in M eine ganze Zahl $\gamma(W, a)$ als die Anzahl aller aufeinanderfolgenden Elementepaare s_i, s_{i+1} des Weges W, welche a als Bindeglied besitzen.

Durch vollständige Induktion beweist man den

Hilfssatz. Sind s und t beliebige Simplexe auf M, W ein Weg, der s und t verbindet, und ferner $a \in s$, $a \in t$ oder $a \notin s$, $a \notin t$, so ist $\gamma(W, a)$ gerade. Ist dagegen $a \in s$, $a \notin t$ oder $a \notin s$, $a \in t$, so ist $\gamma(W, a)$ ungerade.

Wir sind jetzt in der Lage, für zwei Simplexe s und t, die

$$s' = Js = Jt$$

befolgen, zu zeigen, daß $s = t$ ist. Zum Beweis benützen wir einen Weg W in L, der s und t verbindet:

$$W = (s_1, \ldots, s_n): \; s_1 = s, \; s_n = t.$$

Infolge der Grundeigenschaft der Bindungsisomorphie ist

$$W' = (s_1', \ldots, s_n'); \; s_1' = s', \; s_n' = s' \quad (s_i' = Js_i),$$

ein Weg, welcher s' mit sich verbindet. Ferner muß für jedes Element a von M

$$\gamma(W', a) = \gamma(W, a)$$

sein. Das heißt aber, daß $s = t$ ist; J ist somit ein-eindeutig.

Ist nun $s' \mid t'$, a Bindeglied von s' und t', und $s = J^{-1}s'$, $t = J^{-1}t'$, so können wir mit derselben Schlußweise wie eben zeigen, daß s und t Nachbarn mit dem Bindeglied a sind.

Satz 14. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der zusammenhängende Komplex B ein Block ist, ist die Existenz einer Teilmenge Q von M, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Das Bindeglied zweier beliebiger Nachbarn aus B liegt in Q.*

2. *Zu jedem $a \in Q$ und jedem $s \in B$ gibt es ein $t \in B$, so daß s und t Nachbarn mit dem Bindeglied a sind.*

Es gilt stets: $Q = V(B) \vdash D(B)$.

Beweis. Ist B ein Block, setzen wir

$$Q = V(B) \overset{1}{\vdash} D(B).$$

Sind nun s und t Nachbarn in B und etwa $t = s \cup a$, $a \notin s$, dann ist $a \in Q$ wegen $a \notin D(B)$ und $a \in V(B)$.

Ist $s \in B$ und $a \in Q$ beliebig, so gilt für $a \notin s$

$$a \in V(B)$$

und somit

$$D(B) \subset s \cup a \subset V(B).$$

Für $a \in s$ ist statt dessen

$$D(B) \subset s \vdash a \subset V(B).$$

Nach Satz 11 gehören also $s \cup a$ und $s \vdash a$ zu B, womit auch Bedingung (2) für Q nachgewiesen ist.

Nun sei B ein zusammenhängender Komplex, zu welchem eine Menge Q mit den genannten Eigenschaften existiert. Wir bilden $D(B)$ und zeigen, daß B aus allen Simplexen t besteht mit

$$(R) \qquad D(B) \subset t \subset D(B) \cup Q, \; t \in S,$$

(S ist diejenige Schicht, in welcher B liegt).

Es sei t ein Simplex von B, $a \in t$ und $a \notin D(B)$. Es gibt ein Simplex s von B, welches a nicht enthält. s und t kann man durch einen Weg $W = (s_1, \ldots, s_n)$ in B verbinden, in welchem mindestens ein Paar von Nachbarn s_i, s_{i+1} vorkommt, welches a als Bindeglied hat. Denn nach dem Hilfssatz (Seite 140) ist $\gamma(W, a)$ ungerade, also von Null verschieden. Bedingung (1) ergibt somit $a \in Q$. Jedes $a \in t$ ist also Element von $D(B) \cup Q$. Es sind demnach folgende Relationen richtig:

$$(R) \qquad D(B) \subset t \subset D(B) \cup Q, \; t \in S.$$

Umgekehrt erfülle t die Relationen (R). Wir greifen aus B ein Simplex s willkürlich heraus und verbinden s und t durch einen Weg W in dem Komplex $\tilde{B}$, der aus allen t, die die Relation (R) erfüllen, besteht. Weil je zwei aufeinanderfolgende Simplexe von W ein Bindeglied aus Q haben, zeigt man induktiv, daß $t \in B$ ist.

Es bleibt noch zu beweisen, daß $D(B) \cup Q = V(B)$ ist. Jedes Simplex von B ist natürlich in $D(B) \cup Q$ enthalten. Ist a Element von $D(B) \cup Q$, $a \notin s$, $s \in B$, dann ist $a \in Q$ und in dem Simplex $s \cup a$ von B enthalten.

Satz 15. *Ist B ein zusammenhängender Block, J eine Bindungsisomorphie von B auf den Komplex B', so ist B' ein zusammenhängender Block und*

$$V(B) \overset{1}{\vdash} D(B) = V(B') \vdash D(B').$$

Beweis. Sind s' und t' Nachbarsimplexe von B' und a ihr Bindeglied, so ist a nach Satz 13 Bindeglied von $s = J^{-1}s'$ und $t = J^{-1}t'$, also $a \in V(B) \vdash D(B)$.

Ist $s' \in B'$ und $a \in V(B) \vdash D(B)$, so betrachten wir zu $s = J^{-1}s'$ das Nachbarsimplex t, welches mit s zusammen das Bindeglied a hat. Dann besitzen auch s' und $t' = Jt$ das Bindeglied a. Also ist B' nach Satz 14 ein Block und überdies

$$V(B) \vdash D(B) = V(B') \vdash D(B').$$

Satz 16. *Es sei J eine Bindungsisomorphie des zusammenhängenden Komplexes L auf den zusammenhängenden Komplex L'. Dann ist das Bild eines Maximalblocks von L ein Maximalblock von L'.*

Die Maximalblöcke von L und L' werden also durch J ein-eindeutig aufeinander abgebildet.

Beweis. Ist B ein Maximalblock von L, so wird $B' = JB$ nach Satz 15 ein Block von L'. Es sei T' ein Maximalblock von L' mit

$$B' \subset T'.$$

Dann folgt

$$B \subset J^{-1}T';$$

also

$$B = J^{-1}T'$$

und

$$B' = T'.$$

B' ist also ein Maximalblock von L'.

Wir definieren eine *Darstellung* des zusammenhängenden Komplexes L als eine Bindungsisomorphie von L auf einen finiten Komplex F. Der Komplex F heißt ein Darstellungskomplex von L, wenn es eine Darstellung von L auf F gibt.

Satz 17. *Zu jedem zusammenhängenden Block B gibt es höchstens einen simplizialen Darstellungskomplex.*

Beweis. Jeder simpliziale Darstellungskomplex muß nach den vorangegangenen Sätzen aus allen endlichen Teilmengen von $V(B) \vdash D(B)$ bestehen.

Satz 18. *Ist e ein Simplex des zusammenhängenden Blockes B, so gibt es genau eine Darstellung von B in den Darstellungskomplex von B, welche das Simplex e in das leere Simplex abbildet.*

Beweis. Jedem Simplex $s \in B$ ordnen wir die endliche Menge

$$Ds = (e \vdash e \cap s) \cup (s \vdash e \cap s)$$

zu. Wir behaupten, daß D eine Darstellung ist. Zum Beweis nehmen wir an: $t \in B$, $s \in B$ und

$$t = s \cup a, \quad a \notin s.$$

Wir untersuchen zunächst den Fall $a \in e$. Es ist

$$a \in (e \vdash e \cap s) \cup (s \vdash e \cap s)$$
$$a \notin (e \vdash e \cap t) \cup (t \vdash e \cap t).$$

Aus $a \notin e$ ergibt sich

$$a \notin (e \vdash e \cap s) \cup (s \vdash e \cap s)$$
$$a \in (e \vdash e \cap t) \cup (t \vdash e \cap t).$$

Ist $b \in Ds$ und $b \neq a$, so folgt $b \in Dt$ und umgekehrt. In jedem Falle sind also Ds und Dt Nachbarn mit dem Bindeglied a.

Es gibt aber auch nur eine Darstellung dieser Art. Denn bilden D und D' das Simplex e auf das leere Simplex ab, und sind s, t zwei Nachbarn mit dem Bindeglied a, so folgt aus

$$Ds = D's$$

die Gleichung

$$Dt = D't.$$

Denn aus $a \in Ds$ folgt $Dt = Ds \vdash a = D's \vdash a = D't$. Genau so schließt man, wenn $a \notin Ds$ ist.

Ist t beliebiges Simplex aus B, so brauchen wir nur e und t durch einen Weg in B zu verbinden, um induktiv das Resultat $Dt = D't$ zu erhalten.

Ist L ein beliebiger zusammenhängender Komplex, so verstehen wir unter dem *Kern* von L den Durchschnitt aller Maximalblöcke von L. Die Simplexe von L, die im Kern von L liegen, heißen Kernsimplexe von L.

Satz 19. *L sei ein zusammenhängender Komplex. Ist der Kern von L nicht leer, so besitzt L genau einen simplizialen Darstellungskomplex $\mathfrak{D}(L)$. Dieser hat die Gestalt*

$$\mathfrak{D}(L) = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

(Q ist die Menge aller Maximalblöcke von L).

Gibt es zu L einen simplizialen Darstellungskomplex, so ist der Kern von L nicht leer.

Beweis.

1. Es sei e ein Kernsimplex von L. Wir konstruieren zu e eine Darstellung von L auf einen simplizialen Darstellungskomplex F. Hierzu bestimmen wir für jeden Maximalblock von L diejenige Darstellung D_B, die e auf das leere Simplex abbildet. Liegt ein Simplex s zugleich in den Maximalblöcken B und B', so ist

$$D_B s = D_{B'} s.$$

Denn D_B und $D_{B'}$ induzieren beide für den Block $B \cap B'$ (Satz 6) diejenige Darstellung, die e in das leere Simplex abbildet. Durch die Vorschrift $J_e a = D_B a$, falls $a \in B$ ist, haben wir also eine eindeutige Abbildung J_e von L auf einen finiten Komplex F definiert. F ist dabei die Menge aller Simplexe b mit $b = J_e a$, $a \in L$.

J_e ist eine Darstellung. Denn sind s und t beliebige Nachbarsimplexe von L, so bilden s und t einen Block, der in einem Maximalblock B von L enthalten ist. Besitzen s und t das Bindeglied a, dann trifft dies natürlich auch auf $J_e s$ und $J_e t$ zu, weil $J_e s = D_B s$ und $J_e t = D_B t$ ist.

Da nach Satz 16 jeder Maximalblock von F das leere Simplex enthält, ist F nach Satz 5 simplizial.

2. Für den soeben gefundenen Komplex F gilt

$$F = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M .$$

Denn für jeden Maximalblock B ist nach Definition von F und J_e der simpliziale Darstellungskomplex von B in F enthalten. Weil dieser nach Satz 17 die Form $\{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$ hat, muß gelten:

$$\{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M \subset F.$$

Ist andererseits $b \in F$, so gibt es ein $a \in L$ mit $b = J_e a$. Ist a Element des Maximalblocks $B \in Q$, so folgt nach Satz 17 und aus $b = D_B a$

$$b \in \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M .$$

3. Nun sei der zusammenhängende Komplex L durch die Darstellung D auf den simplizialen Komplex F abgebildet. Wir zeigen, daß L ein Kernsimplex hat. Ist B Maximalblock von L, dann ist $B' = DB$ Maximalblock von $F = DL$. Wenn F simplizial ist, muß nach Satz 10 auch B' simplizial sein. Folglich ist das leere Simplex O Element von B'; es enthält also nach Satz 16 jeder Maximalblock B von L das Element $e = D^{-1}O$. Dieses ist demnach Kernsimplex von L.

4. Unter denselben Voraussetzungen wie in (3) beweisen wir für F die Beziehung

$$F = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M .$$

Für jeden Maximalblock $B \in Q$ sei D_B diejenige Darstellung von B, die $e = D^{-1}O$ in das leere Simplex abbildet. Ist $a \in L$ beliebig gewählt und a Element des Maximalblocks B, so gilt

$$D a = D_B a = J_e a.$$

Denn D induziert für B eine Darstellung, welche e in das leere Simplex abbildet und somit mit D_B identisch ist (Satz 17).

Nach (1) besitzt ein zusammenhängender Komplex mit nicht leerem Kern stets einen simplizialen Darstellungskomplex $\mathfrak{D}(L)$. Dieser genügt nach (4) der Beziehung

$$\mathfrak{D}(L) = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

und ist somit eindeutig bestimmt. Aus (3) entnehmen wir, daß ein zusammenhängender Komplex, der einen simplizialen Darstellungskomplex besitzt, stets einen nicht leeren Kern hat.

VI. Cohomologiegruppen (Vorläufige Definition).

Unter allen finiten Komplexen zeichnen sich die simplizialen Komplexe durch besondere Einfachheit aus. Wir erklären jetzt eine allgemeine Randbildung, die „*Corandbildung*", für einen simplizialen und finiten Komplex F. Wir denken uns eine willkürliche Eckenanordnung α der Menge $\mathfrak{F}$ vorgegeben.

A sei eine beliebige Kette auf F mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Ein Simplex s von F schreiben wir in der durch α festgelegten Reihenfolge

$$s = (a_1, \ldots, a_n).$$

Ist die Anzahl der Eckpunkte von s größer als eins, so soll der Corand δA in s den Wert

$$\delta A s = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i A(a_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a_n)^{9})$$

haben. Das über i bedeutet, daß das Glied mit dem Index i wegzulassen ist.

Ist $s = (a)$ ein Simplex von F, so setzen wir

$$\delta A s = 0.$$

Für O selbst sei

$$\delta A O = 0.$$

δA ist in allen Simplexen von F erklärt. δ ist eine allgemeine Randbildung; denn δ ist ein Homomorphismus und es ist $\delta\delta A = O$ für jede Kette A. Ferner besteht die Gleichung $\delta A s = \delta B s$, wenn A und B in allen Nachbarn von s gleiche Werte haben.

Die zu δ gehörige Strukturgruppe heiße Cohomologiegruppe von F bezüglich α.

Wir zeigen jetzt, daß die Cohomologiegruppen des Komplexes F bezüglich der beiden beliebigen Eckenanordnungen α und α' isomorph sind.

Zum Beweis geben wir eine Gruppe an, die jeder Cohomologiegruppe von F bezüglich irgendeiner Eckenanordnung α isomorph ist. Wir bilden deshalb zu F den orientierten Komplex F^*, der aus allen orientierten Simplexen von F besteht.

Eine Kette A von F^* im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ werde so definiert: Es ist eine Funktion, die jedem Simplex von F^* ein Element von $\mathfrak{G}$ zuordnet und die Bedingung $As = -At$ erfüllt, wenn t aus s durch Vertauschung zweier Elemente hervorgegangen ist, d. h. ist

$$s = (a_1, \ldots, a_n),$$

---

[9]) Ist z. B. A eine n-Kette, d. h. besitzt A in allen Simplexen mit von n verschiedener Dimension den Wert Null, so ist δA eine $(n+1)$-Kette.

so soll es zwei Zahlen $i \leqq n$ und $j \leqq n$ geben, so daß $t = (b_1, \ldots, b_n)$ ist:

$$b_q = a_q \text{ für } q \neq i \text{ und gleichzeitig } q \neq j;$$
$$b_i = a_j \text{ und } b_j = a_i.$$

Zusätzlich fordern wir, daß eine Kette in einem Simplex mit mehrfachen Elementen den Wert Null hat. Die Menge aller Ketten auf F^* machen wir zu einer Gruppe, indem wir die Summe $A + B$ zweier Ketten so definieren: Für jedes Simplex $s \in F^*$ sei $(A + B)s = As + Bs$. Die Funktion $A + B$ ist eine Kette. Denn entsteht t aus s durch Vertauschung zweier Elemente, so ist

$$(A + B)t = At + Bt = -As + (-Bs) = -(A + B)s.$$

Die so erklärte Gruppe nennen wir die Gruppe $\mathfrak{L}^*$ der Ketten auf F^* im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Die Corandbildung erklären wir wieder als einen Homomorphismus δ von $\mathfrak{L}^*$ in sich, der $\delta\delta A = O$ für jede Kette A erfüllt, und zwar durch die Formel

$$\delta A(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i A(a_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a_n).$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß die so definierte Funktion tatsächlich eine Kette ist, δ einen Homomorphismus verkörpert und $\delta\delta A$ stets Null ist. A heißt Corand, wenn es eine Kette B gibt, so daß $A = \delta B$ ist; A heißt Cozyklus, wenn $\delta A = O$ ist; die Faktorgruppe $\mathfrak{B}^*$ der Cozyklengruppe nach der Coränder gruppe nennen wir die *Cohomologiegruppe* von F^*. Wir zeigen: Ist $\mathfrak{B}$ die Cohomologiegruppe von F bezüglich der beliebig gewählten Eckenanordnung α von F, so ist $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{B}^*$. Ist A eine Kette auf F, so ordnen wir ihr eine Kette $\mathfrak{J}A = A^*$ auf F^* zu: Ist s ein beliebiges Simplex von F^* mit mehrfachen Elementen, so setzen wir $A^*s = O$; ist aber s ohne mehrfache Elemente, so schreiben wir $A^*s = At$, wenn t die Menge aller Elemente von s ist und t in der durch α vorgeschriebenen Anordnung durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen aus s hervorgeht. Geht t aus s durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen hervor, so setzen wir $A^*s = -At$.

Diese Abbildung $\mathfrak{J}$ ist ein Homomorphismus. Ist A^* eine Kette auf F^*, so gibt es eine und nur eine Kette auf F, deren Bild A^* ist. Ist nämlich s ein Simplex von F, t das orientierte Simplex von F, welches s im Sinne der Eckenanordnung α von F anordnet, so ist $As = A^*t$ eindeutig festgelegt. $\mathfrak{J}$ ist demnach ein Isomorphismus. Da ferner aus $A = \delta B$ die Beziehung $\mathfrak{J}A = \delta\mathfrak{J}B$ folgt, definiert $\mathfrak{J}$ einen Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$.

Die Cohomologiegruppe von F^* kann nach Dimensionszahlen aufgespalten werden: Zunächst bezeichnen wir mit F_n die Menge aller n-dimensionalen Simplexe von F^*. Entsprechend zerlegen wir jede Kette: Wir setzen $A_n s = As$, wenn s n-dimensional ist, $A_n s = O$,

wenn s nicht n-dimensional ist. Eine Kette heißt eine n-Kette, wenn ihr Grundraster in F_n^* enthalten ist. Die Menge $\mathfrak{L}_n$ aller n-Ketten ist eine Untergruppe von $\mathfrak{L}$.

Unter einem n-Corand verstehen wir einen Corand, der zugleich n-Kette ist. Entsprechend wird der n-Cozyklus definiert. Die Menge aller n-Coränder bildet eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{L}_n$, wir nennen sie die n-te Corändergruppe von F^*. Der Homomorphismus δ bildet $\mathfrak{L}_n$ auf die $n+1$-te Corändergruppe von F^* ab. Der Kern dieses Homomorphismus ist die n-te Cozyklengruppe von F^*. Die n-te Cohomologiegruppe läßt sich als Faktorgruppe der n-ten Cozyklengruppe nach der n-ten Corändergruppe definieren, da die n-te Corändergruppe eine Untergruppe der n-ten Cozyklengruppe ist.

Satz 20. *Die Cohomologiegruppe von F^* ist isomorph der direkten Summe $\sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(F^*)$ aller n-ten Cohomologiegruppen von F^*.*

Beweis. Ordnen wir jedem Cozyklus A die Funktion $E = lA$ zu, welche jeder Zahl $n \geqq -1$ den n-Cozyklus A_n entsprechen läßt, so stellt l einen Isomorphismus der Cozyklengruppe auf die direkte Summe aller n-ten Cozyklengruppen von F^* dar. l erzeugt einen Isomorphismus der Corändergruppe in die direkte Summe aller n-ten Corändergruppen von F^*. Somit folgt aus Satz 1 die Behauptung.

Wir treffen nun die Vereinbarung, als eindeutig bestimmte Cohomologiegruppe von F die direkte Summe $\sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(F^*)$ zu bezeichnen. Ist L ein zusammenhängender Komplex, dann heißt die allgemeine Randbildung a von L eine Corandbildung, wenn es eine Darstellung D von L in den Darstellungskomplex F gibt, dessen Corandbildung bezüglich irgendeiner Eckenanordnung durch die Darstellungsisomorphie D^{-1} in a übertragen wird. Ist K ein beliebiger Komplex, so nennen wir die allgemeine Randbildung a auf K eine Corandbildung, wenn für jede Komponente L von K die allgemeine Randbildung $a(L)$ eine Corandbildung ist. Die zu einer Corandbildung von K gehörige Strukturgruppe mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ heißt Cohomologiegruppe von K mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

Satz 21. *Der Komplex K besitzt nur dann eine Cohomologiegruppe mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$, wenn der Kern jeder Komponente von K nicht leer ist.*

Ein Komplex, für welchen jede Komponente einen nicht leeren Kern hat, besitzt bis auf Isomorphie eine und nur eine Cohomologiegruppe mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

Beweis. Besitzt K eine Cohomologiegruppe, so heißt das: jede Komponente hat eine simpliziale Darstellung, also einen nicht leeren Kern.

Andererseits habe jede Komponente von K einen nicht leeren Kern. Dann läßt sich jede Komponente von K simplizial darstellen, muß

also eine Corandbildung besitzen. Ist für jede Komponente L eine Corandbildung a_L ausgewählt, so lassen sich diese zu einer allgemeinen Randbildung a von K zusammensetzen. Diese erfüllt $a(L) = a_L$; a ist also eine Corandbildung.

Um die Isomorphie zu zeigen, geben wir eine Gruppe an, die jeder Cohomologiegruppe von K mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ isomorph ist. Ist L Komponente von K, so bezeichne $\mathfrak{D}^*(L)$ den orientierten Darstellungskomplex von L. Die Cohomologiegruppe $\mathfrak{B}(\mathfrak{D}^*(L))$ von $\mathfrak{D}^*(L)$ mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ ist nach Seite 135 jeder Cohomologiegruppe von L mit dem gleichen Koeffizientenbereich isomorph.

Die direkte Summe

$$\mathfrak{B}(K) = \sum_{L \in W} \mathfrak{B}(\mathfrak{D}^*(L)),$$

in welcher W die Menge aller Komponenten von K bedeutet, ist nach Satz 2 jeder Cohomologiegruppe von K isomorph.

Wir können $\mathfrak{B}(K)$ als eindeutig bestimmte Cohomologiegruppe von K festlegen und in folgender Form schreiben:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \mathfrak{B}(K) = \sum_{L \in W} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(\mathfrak{D}^*(L)).$$

Nach dem Muster der Beziehung $(\mathfrak{B})$ wird im folgenden Abschnitt formal die endgültige Definition der Cohomologiegruppe eines beliebigen Komplexes gegeben.

Diese Definition wird in dreifacher Hinsicht allgemeiner sein:

1. Sie ist auf beliebige Komplexe anwendbar.

K wird statt in seine Komponenten in die Durchschnitte $K \cap S$ zerlegt:

$$K = \bigcup_{S \in W} K \cap S;$$

W bedeutet hierin die Menge aller Schichten S mit $K \cap S \neq 0$.

Die in Satz 19 angegebene Beziehung erheben wir allgemein zur Definitionsgleichung simplizialer Darstellungskomplexe:

$$\mathfrak{D}(L) = \bigcup_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

sei der simpliziale Darstellungskomplex des in der Schicht S enthaltenen Komplexes L.

Als Cohomologiegruppe von K kann man in Analogie zu $(\mathfrak{B})$

$$(\mathfrak{B}') \qquad \mathfrak{B}(K) = \sum_{S \in W} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(\mathfrak{D}^*(K \cap S))$$

definieren.

2. Eine weitere Verallgemeinerung kommt dadurch zustande, daß man an die Stelle der Schichten S die Schichtungen U von M treten läßt.

$(\mathfrak{B}')$ geht dann über in

$$(\mathfrak{B}'') \qquad \mathfrak{B}(K) = \sum_{U \in W} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n\Big(\sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(K \cap S)\Big).$$

3. In Analogie zu den LEFSCHETZ-Relativzyklen werden Relativcohomologiegruppen definiert, die sich auf Tripel $Q \subset P \subset K$ von Komplexen beziehen.

VII. Cohomologiegruppen (Endgültige Definition).

Es seien $H \subset G \subset F$ drei orientierte simpliziale finite Komplexe auf M. Wir definieren jetzt die Cohomologiegruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$.

Ist A eine Kette[10]) im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$, so bezeichne $\langle A \rangle$ den Grundkomplex von A, d. h. die Menge aller Simplexe, welchen A einen von Null verschiedenen Wert erteilt.

Aus $\langle A \rangle \cap X = 0$ folgt zunächst $\langle \delta A \rangle \cap X = 0$, wenn X ein simplizialer Teilkomplex von F ist.

Das beweist man so: Es sei $s \in X$, $s = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$, dann sind alle $(a_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a_{n+1})$ ebenfalls Elemente von X. Also ist $\langle \delta A \rangle \cap X = 0$.

Mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnen wir diejenige Untergruppe von $\mathfrak{L}_n$, die aus allen Ketten A auf F im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ besteht, welche $\langle A \rangle \cap H = 0$ erfüllen: $\mathfrak{T}_n$ sei dagegen diejenige Untergruppe von $\mathfrak{L}_n$, die sich aus den Ketten auf A zusammensetzt, welche $\langle A \rangle \cap G = 0$ genügen.

Weil $\mathfrak{T}_n \subset \mathfrak{S}_n$ ist, können wir die Faktorgruppe

$$\underline{\mathfrak{L}}_n = \mathfrak{S}_n / \mathfrak{T}_n$$

bilden. Die Elemente von $\underline{\mathfrak{L}}_n$ heißen n-Ketten auf $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$.

Ist $A \in \mathfrak{S}_n$ beziehungsweise $A \in \mathfrak{T}_n$, so ist $\delta A \in \mathfrak{S}_n$ bzw. $\delta A \in \mathfrak{T}_n$; denn es folgt $\langle \delta A \rangle \cap H = 0$ bzw. $\langle \delta A \rangle \cap G = 0$.

δ definiert also einen Homomorphismus von $\underline{\mathfrak{L}}_n$ in sich: Wir brauchen nur aus jeder Restklasse $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{L}}_n$ einen Repräsentanten A auszuwählen und der Restklasse $\delta \mathfrak{A}$ die durch δA bestimmte Restklasse $\delta \mathfrak{A}$ zuzuordnen. Diese Zuordnung ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten.

Von $\underline{\mathfrak{L}}_n$ bilden wir die Untergruppe $\underline{\mathfrak{Z}}_n$, die aus allen Elementen A mit $\delta A = 0$ besteht; wir nennen sie die n-Cozyklengruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$. Ferner bilden wir die Untergruppe $\underline{\mathfrak{H}}_n$ von $\underline{\mathfrak{L}}_n$. Sie bestehe aus allen $A \in \underline{\mathfrak{L}}_n$, zu welchen es ein $B \in \underline{\mathfrak{L}}_{n-1}$ gibt mit $A = \delta B$. $\underline{\mathfrak{H}}_n$ heißt n-Coründergruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$. Es ist $\underline{\mathfrak{H}}_n \subset \underline{\mathfrak{Z}}_n$.

---

[10]) Zu allen Begriffen, die sich auf orientierte Komplexe beziehen, vgl. Seite 145 und 146.

Wir definieren $\mathfrak{B}_n(H, G, F) = \underline{\mathfrak{Z}}_n/\underline{\mathfrak{H}}_n$ als die *n-te Cohomologiegruppe* von F mod $F \vdash G$ in $F \vdash H$.

Ist L ein beliebiger in einer Schicht S enthaltener Komplex auf der Menge M, so verstehen wir unter dem Darstellungskomplex $\mathfrak{D}(L)$ von L die Vereinigungsmenge aller Blöcke $\{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$, für welche B ein Maximalblock von L ist. Aus $L_1 \subset L_2$ folgt $\mathfrak{D}(L_1) \subset \mathfrak{D}(L_2)$.

Nun seien $Q \subset P \subset K$ beliebige Komplexe auf der Menge M. Eine Schichtung U von M heißt zu K regulär, wenn alle ihre Schichten mit K einen nicht leeren Durchschnitt besitzen. W sei die Menge aller zu K regulären Schichtungen.

Wir definieren die Cohomologiegruppe von K mod $K \vdash P$ in $K \vdash Q$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{B}(Q, P, K) = \sum_{U \in W} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n\left(\sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(Q \cap S), \sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(P \cap S), \sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(K \cap S)\right).$$

Die zweite direkte Summe ist dabei über die Menge aller ganzen Zahlen $n \geqq -1$ zu erstrecken.

Jedem $U \in W$ und jeder ganzen Zahl $n \geqq -1$ entspricht ein Glied der direkten Summe; die n-te Cohomologiegruppe der Schichtung U von K mod $K \vdash P$ in $K \vdash Q$

$$\mathfrak{B}_{U,n}(Q, P, K) = \mathfrak{B}_n\left(\sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(Q \cap S), \sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(P \cap S), \sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(K \cap S)\right).$$

$$\mathfrak{B}(K) = \mathfrak{B}(O, K, K)$$

heißt die Cohomologiegruppe von K im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Sie ergibt sich also als Spezialfall der allgemeineren „Relativcohomologiegruppe", wenn Q gleich der leeren Menge und P gleich dem ganzen Komplex K gesetzt wird.

VIII. Simpliziale Abbildungen.

Sind K' und K zwei Komplexe auf den Mengen M' und M, so bezeichnen wir eine eindeutige Abbildung π von M' in M als eine *Eckenzuordnung*. Ist $W' \subset M'$, so bestehe $\pi W'$ aus allen Elementen $a \in M$, für welche es ein a' mit $a = \pi a'$ gibt.

Wir sagen, π erzeugt eine *simpliziale Abbildung* von K' in K, wenn aus $s' \in K'$, $\pi s' \in K$ folgt. Wir sprechen von einer simplizialen Abbildung von K' auf K, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $s' \in K'$ gibt mit $\pi s' = s$ und schreiben $K = \pi K'$. π sei eine Eckenzuordnung von M' in M. Die Schichtung U' heißt zu π regulär, wenn es zu jeder Schicht $S' \in U'$ mindestens ein Simplex von S' gibt, das durch π ein-eindeutig auf ein Simplex von M abgebildet wird.

Satz 22. *π sei eine simpliziale Abbildung des zusammenhängenden Komplexes K' auf den Komplex K. Dann ist K zusammenhängend.*

Beweis. Sind $s \in K$ und $t \in K$ beliebig gewählt und $s' \in K$, $t' \in K'$ Urbilder von s bzw. t, dann verbinden wir s' und t' durch einen Weg in K':

$$s' = s_1', \ldots, s_n' = t'.$$

Schreiben wir identische Simplexe in der Folge

$$s = s_1, \ldots, s_n = t \quad (s_i = \pi s_i')$$

nur einmal auf, so erhalten wir einen Weg in K, der s und t verbindet.

Ist S' eine Schicht auf M', so ist also der Komplex $\pi S'$ zusammenhängend, wenn π eine Eckenzuordnung von M' in M ist. $\pi S'$ liegt demnach in einer Schicht S von M. Da Verwechslungen ausgeschlossen sind, wollen wir künftig unter $\pi S'$ immer die ganze Schicht S verstehen

$$S = \pi S'.$$

Ist U' eine Schichtung auf M', so bezeichne U' diejenige Schichtung auf M, die sich aus allen Schichten $\pi S'$ mit $S' \in U'$ zusammensetzt.

Satz 23. *Ist der zusammenhängende Komplex $L \subset S$ in der Schicht S simplizial, so besteht $\mathfrak{D}(L)$ aus allen endlichen Simplexen t auf M, zu welchen es ein $s \in L$ gibt mit $t \subset s$.*

Beweis. Es sei $s \in L$ und $t \subset s$ ein endliches Simplex, B sei ein Maximalblock von L, der s enthält. Dann ist wegen $D(B) = 0$ nach Satz 10

$$t \in \{V(B)\} \cap O_M = \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

oder

$$t \in \mathfrak{D}(L).$$

Umgekehrt sei $t \in \mathfrak{D}(L)$. Es gibt einen Maximalblock B von L mit $t \in \{V(B)\} \cap O_M$. Ist $s \in B$ beliebig gewählt, so ist offenbar $s \cup t \in B$ und $t \subset s \cup t$. Wegen $s \cup t \in L$ ist hiermit der Satz bewiesen.

Satz 24. *K' und K seien zwei simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M, π eine Eckenzuordnung von M' in M, die K' in K simplizial abbildet: Dann bildet π für jede Schicht S' von M' mit $S' \cap K' \neq 0$ den Komplex $\mathfrak{D}(K' \cap S')$ simplizial in $\mathfrak{D}(K \cap S)$ ab ($S = \pi S'$).*

Beweis. Es sei $s' \in \mathfrak{D}(K' \cap S')$. Es gibt ein $t' \in K' \cap S'$ mit $s' \subset t'$. Es ist $\pi s' \subset \pi t' \in K \cap S$ oder

$$\pi s' \in \mathfrak{D}(K \cap S).$$

Satz 25. *K' und K seien zwei simpliziale Komplexe, π eine Eckenzuordnung von M' in M, die K' in K simplizial abbildet, und U' eine Schichtung von M' mit $K' \cap S' \neq 0$ für mindestens ein $S' \in U'$.*

Dann bildet π den Komplex $\sum_{S' \in U'} \mathfrak{D}(K' \cap S')$ simplizial in $\sum_{S \in U} \mathfrak{D}(K \cap S)$ ab ($U = \pi U'$).

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorangegangenen.

Es seien $H \subset G \subset F$ und $H' \subset G' \subset F'$ simpliziale finite orientierte Komplexe auf M bzw. M', π eine Eckenzuordnung von M' in M, die

simpliziale Abbildungen von H' in H, von G' in G und von F' in F hervorruft. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist eine geeignete Definition eines Homomorphismus h von $\mathfrak{B}_n(F, G, H)$ in $\mathfrak{B}_n(F', G', H')$.

Zuerst erklären wir einen Homomorphismus h von $\mathfrak{B}_n(F)$ in $\mathfrak{B}_n(F')$. A sei eine n-Kette auf F im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Ist s' ein beliebiges n-Simplex von F' so setzen wir für hA in s' fest:

$$(hA)s' = A\pi s'.$$

Wir zeigen, daß hA tatsächlich eine n-Kette ist.

Es sei

$$s' = (a_1', \ldots, a_i', \ldots, a_j', \ldots, a_{n+1}'),$$
$$t' = (a_1', \ldots, a_j', \ldots, a_i', \ldots, a_{n+1}').$$

Das Bildsimplex von t' geht aus dem Bildsimplex von s' ebenfalls durch Vertauschung der Elemente mit den Indizes i und j hervor. Das bedeutet

$$(hA)s' = -(hA)t'.$$

Besitzt s' mehrfache Elemente, so ist das auch für das Bildsimplex der Fall:

$$(hA)s' = 0.$$

I. Wir beweisen jetzt $h\delta = \delta h$.

Es genügt zu zeigen, daß aus $B = \delta A$ stets folgt

$$B' = \delta A' \quad (A' = hA,\ B' = hB).$$

Für ein beliebiges $n+1$-Simplex $s' \in F'$ mit dem Bild $s \in F$ ist

$$B's' = Bs = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i A(a_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i A'(a_1', \ldots, \hat{i}, \ldots, a_n') = \delta A's'.$$

Weiter gilt

II. Aus $\langle A\rangle \cap H = 0$ bzw. $\langle A\rangle \cap G = 0$ folgt: $\langle hA\rangle \cap H' = 0$ bzw. $\langle hA\rangle \cap G' = 0$.

Denn ist s' ein beliebiges $n+1$-Simplex von H', so folgt $hAs' = A\pi s' = 0$ wegen $\pi s' \in H$.

Hieraus ergibt sich: Ist A ein Element der Untergruppe $\mathfrak{T}_n$ bzw. $\mathfrak{S}_n$ von $\mathfrak{L}_n$, so ist ha Element der Untergruppe $\mathfrak{T}_n'$ bzw. $\mathfrak{S}_n'$ von $\mathfrak{L}_n'$. $\mathfrak{T}_n$ bzw. $\mathfrak{S}_n$ wird durch h homomorph in $\mathfrak{T}_n'$ bzw. $\mathfrak{S}_n'$ abgebildet.

Demnach kann man mittels h $\underline{\mathfrak{L}}_n$ homomorph in $\underline{\mathfrak{L}}_n'$ abbilden. Denn ist $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}_n$, und sind A, B Repräsentanten von $\mathfrak{A}$, so folgen aus

$$A - B \in \mathfrak{T}_n, \quad A \in \mathfrak{S}_n, \quad B \in \mathfrak{S}_n$$

die Beziehungen

$$hA - hB \in \mathfrak{T}_n', \quad hA \in \mathfrak{S}_n', \quad hB \in \mathfrak{S}_n'.$$

hA und hB sind also Repräsentanten des gleichen Elementes von $\underline{\mathfrak{L}}_n'$.

III. 1. Aus $A = \delta B$ folgt

$$h A = h \delta B = \delta h B.$$

Also: Die n te Coräandergruppe von F mod $F \vdash G$ in $F \vdash H$ wird in die n-te Coräandergruppe von F' mod $F' \vdash G'$ in $F' \vdash H'$ homomorph abgebildet.

2. Aus $\delta B = 0$ folgt

$$\delta h B = h \delta B = 0.$$

Die n-te Cozyklengruppe von F mod $F \vdash G$ in $F \vdash H$ wird also durch h in die n-te Cozyklengruppe von F' mod $F' \vdash G'$ in $F' \vdash H'$ homomorph abgebildet.

Man kann deshalb in der üblichen Weise durch h einen ebenfalls mit h bezeichneten Homomorphismus von $\mathfrak{B}_n(F, G, H)$ in $\mathfrak{B}_n(F', G', H')$ definieren.

Es seien $Q' \subset P' \subset K'$ und $Q \subset P \subset K$ zwei Tripel simplizialer Komplexe auf den Mengen M' bzw. M. Die Eckenzuordnung π von M' auf M erzeuge eine simpliziale Abbildung von Q' in Q, von P' in P und von K' in K.

Wir definieren einen Homomorphismus h von $\mathfrak{B}_{U,n}(Q, P, K)$ in $\mathfrak{B}_{U';n}(Q', P', K')$ $(U = \pi U')$.

Nach Satz 25 bildet π die Komplexe

$$\sum_{s' \in U'} \mathfrak{D}(Q' \cap S'), \quad \sum_{s' \in U'} \mathfrak{D}(P' \cap S'), \quad \sum_{s' \in U'} \mathfrak{D}(K' \cap S')$$

in

$$\sum_{S \in U} \mathfrak{D}(Q \cap S), \quad \sum_{S \in U} \mathfrak{D}(P \cap S), \quad \sum_{S \in U} \mathfrak{D}(K \cap S)$$

beziehungsweise simplizial ab.

π definiert also nach der soeben gegebenen Vorschrift einen Homomorphismus h von

$$\mathfrak{B}_n\Big(\sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(Q \cap S), \sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(P \cap S), \sum_{S \in U} \mathfrak{D}^*(K \cap S)\Big) = \mathfrak{B}_{U,n}(Q, P, K)$$

in

$$\mathfrak{B}_n\Big(\sum_{s' \in U'} \mathfrak{D}^*(Q' \cap S'), \sum_{s' \in U'} \mathfrak{D}^*(P' \cap S'), \sum_{s' \in U'} \mathfrak{D}^*(K' \cap S')\Big) = \mathfrak{B}_{U',n}(Q', P', K').$$

Wir wollen diesen durch die Eckenzuordnung π erzeugten Homomorphismus h künftig ebenfalls mit π bezeichnen.

IX. Äquivalente simpliziale Abbildungen.

K' sei ein Komplex auf der Menge M', K ein Komplex auf der Menge M. Zwei simpliziale Abbildungen π_1 und π_2 von K' in K heißen *äquivalent*, wenn $\pi_1 s' \cup \pi_2 s' \in K$ für jedes Simplex $s' \in K'$ ist.

Satz 26. *K' und K seien simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M, S' sei eine Schicht von M' mit $K' \cap S' \neq 0$. Erzeugen die*

beiden Eckpunktzuordnungen π_1 und π_2 von M' in M äquivalente simpliziale Abbildungen von K' in K, und ist $\pi_1 S' = \pi_2 S'$, so erzeugen π_1 und π_2 auch äquivalente simpliziale Abbildungen von $\mathfrak{D}(K' \cap S')$ in $\mathfrak{D}(K \cap S)$ $(S = \pi_1 S')$.

Beweis. Es sei $s' \in \mathfrak{D}(K' \cap S')$. Es gibt ein $t' \in K' \cap S'$ mit $s' \subset t'$. Wegen

$$\pi_1 s' \cup \pi_2 s' \subset \pi_1 t' \cup \pi_2 t' \in K \cap S$$

folgt

$$\pi_1 s' \cup \pi_2 s' \in \mathfrak{D}(K \cap S).$$

Weiter ergibt sich:

Satz 27. *K' und K seien simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M, U' sei eine Schichtung von M' mit $K' \cap S' \neq 0$ für mindestens ein $S' \in U'$. Erzeugen die beiden Eckpunktzuordnungen π_1 und π_2 von M' in M äquivalente simpliziale Abbildungen von K' in K und ist $\pi_1 U' = \pi_2 U'$, so erzeugen π_1 und π_2 auch äquivalente simpliziale Abbildungen von $\bigcup_{S' \in U'} \mathfrak{D}(K' \cap S')$ in $\bigcup_{S \in U} \mathfrak{D}(K \cap S)$. $(U = \pi_1 U')$.*

$H' \subset G' \subset F'$ und $H \subset G \subset F$ seien zwei Tripel finiter simplizialer Komplexe auf den Mengen M' bzw. M, π_1 und π_2 seien zwei Eckpunktzuordnungen von M' in M, die äquivalente simpliziale Abbildungen von H' in H, von G' in G und von F' in F erzeugen.

Wir definieren eine Abbildung q der Gruppe $\mathfrak{L}_n$ aller n-Ketten auf F im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ in die Gruppe $\mathfrak{L}'_{n-1}$ aller $n-1$-Ketten auf F' im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Ist A eine beliebige n-Kette auf F, so legen wir den Wert der $n-1$-Kette qA in einem beliebigen $n-1$-Simplex s' von K' so fest:

$$qA\,s' = qA(a'_1, \ldots, a'_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i A(\pi_1 a'_1, \ldots, \pi_1 a'_i, \pi_2 a'_{i+1}, \ldots, \pi_2 a'_n).$$

Hilfssatz 1. Ist A n-Kette auf F, so folgt aus $\langle A \rangle \cap G = 0$ bzw. $\langle A \rangle \cap H = 0$ die Gleichung $\langle qA \rangle \cap G' = 0$ bzw. $\langle qA \rangle \cap H' = 0$. Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, daß π_1 und π_2 äquivalente simpliziale Abbildungen von H' in H erzeugen (bzw. von G' in G).

Hilfssatz 2. Zwischen den Operatoren δ, q, π_1, π_2 besteht die Beziehung

$$\delta q + q\delta = \pi_2 - \pi_1.$$

Beweis. Wir haben nachzuweisen, daß für ein beliebiges $n-1$-Simplex $s' \in F'$ und eine beliebige $n-1$-Kette A auf F die Gleichung

$$(\delta q + q\delta) A\,s' = (\pi_2 - \pi_1) A\,s'$$

richtig ist.

Es sei $s' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ beliebig gewählt.

Formales Rechnen ergibt:

$$(\delta q + q\delta) A s' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i q A(a'_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a'_n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k A(\pi_1 a'_1, \ldots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \ldots, \hat{i}, \ldots, \pi_2 a'_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} A(\pi_1 a'_1, \ldots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \ldots, \hat{i}, \ldots, \pi_2 a'_n)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{i+k-1} A(\pi_1 a'_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \ldots, \pi_2 a'_n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k} A(\pi_1 a'_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \ldots, \pi_2 a'_n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i+k+1} A(\pi_1 a'_1, \ldots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \ldots, \hat{i}, \ldots, \pi_2 a'_n).$$

Zuerst vergleichen wir die erste und die vierte Doppelsumme: $\sum_1$ und $\sum_4$. Die erste Doppelsumme ist zu erstrecken über alle Zahlenpaare (i, k), für welche $1 \leqq i \leqq n$ und $i \leqq k+1$ ist, die vierte dagegen über alle (i, k) mit $1 \leqq i \leqq n$ und $i \leqq k$. Jedem Zahlenpaar $i = k$, $i \leqq k$, $1 \leqq i \leqq n$ entspricht in $\sum_1$ und $\sum_4$ je ein Summand. Die Summe beider Summanden ist Null. $\sum_1 + \sum_4$ reduziert sich also auf eine Summe, die über sämtliche (i, k) mit $i = k$ und $1 \leqq i \leqq n$ zu erstrecken ist. Vergleicht man die zweite und die dritte Doppelsumme in derselben Weise, so kommt man schließlich zu dem Resultat

$$(\delta q + q\delta) A s' = \sum_{i=1}^{n} A(\pi_1 a'_1, \ldots, \pi_1 a'_{i-1}, \pi_2 a'_i, \ldots, \pi_2 a'_n)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} A(\pi_1 a'_1, \ldots, \pi_1 a'_i, \pi_2 a'_{i+1}, \ldots, \pi_2 a'_n)$$

$$= A(\pi_2 a'_1, \ldots, \pi_2 a'_i, \ldots, \pi_2 a'_n)$$

$$- A(\pi_1 a'_1, \ldots, \pi_1 a'_i, \ldots, \pi_1 a'_n)$$

$$= \pi_2 A s' - \pi_1 A s'$$

$$= (\pi_2 - \pi_1) A s'.$$

Satz 28. *Es seien $H' \subset G' \subset F'$ und $H \subset G \subset F$ zwei Tripel simplizialer finiter orientierter Komplexe; π_1 und π_2 seien zwei Eckpunktzuordnungen, die äquivalente simpliziale Abbildungen von H' in H, von G' in G, von F' in F erzeugen. Dann definieren π_1 und π_2 denselben Homomorphismus von $\mathfrak{B}_n(H, G, F)$ in $\mathfrak{B}_n(H', G', F')$.*

Beweis. Es sei $a \in \mathfrak{B}_n(H, G, F)$. Wir wählen aus a einen Repräsentanten $\mathfrak{A}$ aus. $\mathfrak{A}$ ist ein n-Cozyklus von F mod $F \vdash G$ in $F \vdash H$. Ist die n-Kette A auf F Repräsentant von $\mathfrak{A}$, so ist $\langle A \rangle \cap H = 0$ (nach Definition von $\mathfrak{L}_n$) und $\langle \delta A \rangle \cap G = 0$, weil $\delta \mathfrak{A} = 0$ und somit δA Repräsentant des Nullelementes T_n von $\mathfrak{L}_n$ ist.

Aus $\langle A \rangle \cap H = 0$ und $\langle \delta A \rangle \cap G = 0$

folgt nach Hilfssatz 1

$$\langle q A \rangle \cap H = 0 \text{ und } \langle q \delta A \rangle \cap G = 0.$$

$q A$ ist also Repräsentant eines Elementes $\mathfrak{B}$ von $\underline{\mathfrak{L}}_n$.
$q \delta A$ ist Repräsentant des Nullelementes von $\underline{\mathfrak{L}}_n$.
Nach Hilfssatz 2 ist

$$\pi_2 A - \pi_1 A = q \delta A + \delta q A.$$

Ersetzen wir also die Ketten A, $q A$ und $q \delta A$ durch die Elemente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und das Nullelement von $\underline{\mathfrak{L}}_n$, so geht die Gleichung über in

$$\pi_2 \mathfrak{A} - \pi_1 \mathfrak{A} = \delta \mathfrak{B}.$$

$\pi_2 \mathfrak{A} - \pi_1 \mathfrak{A}$ ist demnach ein n-Corand von F mod $F \vdash G$ in $F \vdash H$. Folglich sind $\pi_2 \mathfrak{A}$ und $\pi_1 \mathfrak{A}$ Repräsentanten des gleichen Elementes von $\mathfrak{B}_n(H', G', F')$:

$$\pi_1 a = \pi_2 a, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 29. *$Q' \subset P' \subset K'$ und $Q \subset P \subset K$ seien simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M; U' sei eine Schichtung von M' mit $K' \cap S' \neq 0$ für mindestens ein $S' \in U'$. Erzeugen die beiden Eckpunktzuordnungen π_1 und π_2 von M' in M äquivalente simpliziale Abbildungen von Q' in Q, von P' in P und von K' in K, und ist $\pi_1 U' = \pi_2 U' = U$, so definieren π_1 und π_2 denselben Homomorphismus von*

$$\mathfrak{B}_{U,n}(Q, P, K) \text{ in } \mathfrak{B}_{U',n}(Q', P', K').$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 27 und 28.

In den folgenden Abschnitten benötigen wir ausschließlich simpliziale Komplexe. Für diese empfiehlt sich eine Vereinfachung der Cohomologiegruppe, welche, was die Klassifizierung der simplizialen Komplexe anbetrifft, keine Einschränkung bedeutet.

Ist nämlich U eine Schichtung von M, und leiten wir aus ihr die Schichtung $\overline{U}$ ab, die aus allen Schichten $\overline{S}$ besteht, zu welchen es ein $S \in U$ gibt mit $S < \overline{S}$, so ist

$$\sum_{\overline{S} \in \overline{U}} \mathfrak{D}(K \cap \overline{S}) = \sum_{S \in U} \mathfrak{D}(K \cap S).$$

Denn aus $S < \overline{S}$ folgt

$$\mathfrak{D}(K \cap \overline{S}) \subset \mathfrak{D}(K \cap S).$$

Wählen wir nämlich $t \in \mathfrak{D}(K \cap \overline{S})$ beliebig aus, so gibt es ein $s \in K \cap \overline{S}$ mit $t \subset s$. Wegen $S < \overline{S}$ existiert ein $q \in K \cap S$ und ein $\overline{q} \in K \cap \overline{S}$ mit $q \subset \overline{q}$.

Es ist

$$q \vdash q \cap s \subset \overline{q} \vdash \overline{q} \cap s$$

eine endliche Menge.

Also $q \cap s \cup t \in S$

und $q \cap s \cup t \in K$ (wegen $q \cap s \cup t \subset s \in K$)

oder $t \subset q \cap s \cup t \in K \cap S$,

$t \in \mathfrak{D}(K \cap S)$, w. z. b. w.

Wir erhalten also dieselbe Klassifizierung der simplizialen Komplexe durch ihre Cohomologiegruppe, wenn wir künftig den Begriff der Schichtung — enger als bisher — definieren als eine Menge von Schichten, welche mit jeder Schicht S alle Schichten $\overline{S} > S$ enthält.

Ist π eine Eckenzuordnung von M' in M, U' eine Schichtung von M', dann haben wir unter $\pi U'$ diejenige Schichtung von M zu verstehen, die aus allen Schichten S von M besteht, zu welchen es eine Schicht $S' \subset U'$ gibt mit

$$\pi S' \leqq S.$$

Es gibt nur eine Schichtung, welche O_M enthält: Es ist die Schichtung aller Schichten von M. Wir bezeichnen sie ebenfalls mit O_M.

Die Schichtung U heißt zum Komplex K auf M regulär, wenn es zu jedem $S \in U$ ein $S' \in U$ gibt mit $S' \leqq S$ und $K S' \neq 0$.

Die Schichtung U von M heißt zur Eckenzuordnung π von M' in M regulär, wenn es zu jeder Schicht $S \in U$ eine Schicht $S' \in U$ mit $S' < S$ und ein Simplex $s' \in S'$ gibt, so daß s' durch π auf ein Simplex von M ein-eindeutig abgebildet wird.

X. Spektren.

Ein *Spektrum* sei definiert als eine teilweise geordnete Menge $\sum$ mit folgenden Eigenschaften:

Zu je zwei Elementen $e_1 \in \sum$ und $e_2 \in \sum$ gibt es ein Element $e \in \sum$ mit $e_1 \leqq e$ und $e_2 \leqq e$. Jedem Element $e \in \sum$ sei eine Menge $M(e)$ und drei simpliziale Komplexe $Q(e) \subset P(e) \subset K(e)$ zugeordnet. Zu je zwei Elementen $e' > e$ gehöre eine nicht leere Menge von Eckpunktzuordnungen von $M(e')$ in $M(e)$. Diese Eckpunktzuordnungen heißen Projektionen von e' in e. Sind π_1 und π_2 zwei Projektionen von e' in e, so sollen sie äquivalente simpliziale Abbildungen von $Q(e')$ in $Q(e)$, von $P(e')$ in $P(e)$ und von $K(e')$ in $K(e)$ erzeugen. Ist $e'' > e' > e$ und π' eine Projektion von e'' in e' und π eine Projektion von e' in e, so soll $\pi'' = \pi' \pi$ eine Projektion von e'' in e sein.

T sei eine nicht leere Teilmenge von $\sum$, welche für $e \leqq e'$ mit jedem $e \in \mathsf{T}$ auch $e' \in \sum$ enthält. Ordnen wir jedem $e \in \mathsf{T}$ die Menge $M(e)$, die Komplexe $Q(e)$, $P(e)$ und $K(e)$, sowie je zwei Elementen $e < e'$ die Projektionen aus $\sum$ von e' in e zu, so erhalten wir wieder ein Spektrum, das „Teilspektrum" T von $\sum$.

Satz 30. *Der Durchschnitt* $\mathsf{T}_1 \cap \mathsf{T}_2$ *zweier Teilspektren* T_1 *und* T_2 *von* $\sum$ *ist wieder ein Teilspektrum von* $\sum$.

Beweis. $\mathsf{T}_1 \cap \mathsf{T}_2$ ist nicht leer. Denn ist $e_1 \in \mathsf{T}_1$ und $e_2 \in \mathsf{T}_2$, so gibt es ein e mit $e_1 \leqq e$ und $e_2 \leqq e$. Es ist $e \in \mathsf{T}_1 \cap \mathsf{T}_2$.

Ist $e \in \mathsf{T}_1 \cap \mathsf{T}_2$ beliebig und $e \leqq e'$, so folgt $s' \in \mathsf{T}_1$ und $e' \in \mathsf{T}_2$, also $e' \in \mathsf{T}_1 \cap \mathsf{T}_2$.

$\mathfrak{F}$ sei die Menge aller Funktionen F folgender Eigenschaften:

1. Der Definitionsbereich von F ist ein Teilspektrum T von $\sum$.
2. F ordnet jedem $e \in \mathsf{T}$ eine Schichtung $F(e)$ von $M(e)$ zu.
3. Für $e' > e$, $e' \in \mathsf{T}$, $e \in \mathsf{T}$ gibt es eine Projektion von e' in e mit

$$\pi F(e') = F(e),$$

wobei $F(e')$ zu π und $K(e')$ regulär ist.

Die Funktion F_0, die jedem e die Nullschichtung von $M(e)$ zuordnet, gehört offenbar zu $\mathfrak{F}$.

Es sei F ein Element von $\mathfrak{F}$ mit dem Definitionsbereich T. Jedem $e \in \mathsf{T}$ entspricht die Gruppe $\mathfrak{B}_{F(e),n}(Q(e), P(e), K(e))$.

Ist π eine beliebige Projektion von $e' \in \mathsf{T}$ in $e \in \mathsf{T}$ mit $\pi F(e') = F(e)$, so definiert diese einen Homomorphismus $h_n(F; e', e)$ von $\mathfrak{B}_{F(e),n}(Q(e), P(e), K(e))$ in $\mathfrak{B}_{F(e'),n}(Q(e'), P(e'), K(e'))$. Nach Satz 29 ist dieser Homomorphismus unabhängig von der speziellen Wahl der Projektion π.

Sind F' und F zwei Elemente von $\mathfrak{F}$ mit den Definitionsbereichen T' und T, so schreiben wir

$$F' \subset F,$$

wenn $\mathsf{T}' \subset \mathsf{T}$ und für jedes $e \in \mathsf{T}'$

$$F'(e) = F(e)$$

ist.

Wir bezeichnen zwei Elemente F' und F von $\mathfrak{F}$ als äquivalente

$$F_1 \sim F_2,$$

wenn es ein F_{12} in $\mathfrak{F}$ gibt mit

$$F_{12} \subset F_1 \text{ und } F_{12} \subset F_2.$$

Die Relation $\sim$ ist natürlich reflexiv und symmetrisch. Sie ist aber auch transitiv. Denn ist

$$F_1 \sim F_2 \text{ und } F_2 \sim F_3,$$

so folgt die Existenz von Elementen F_{12} und F_{23} von (die zugehörigen Definitionsbereiche seien T_{12} und T_{13}) mit

$$F_{12} \subset F_1 \text{ und } F_{12} \subset F_2;$$
$$F_{23} \subset F_2 \text{ und } F_{23} \subset F_3.$$

Wir geben eine Funktion $F_{13} \in \mathfrak{F}$ an, deren Definitionsbereich

$$\mathsf{T}_{13} = \mathsf{T}_{12} \cap \mathsf{T}_{23}$$

sei, indem wir für jedes $e \in \mathsf{T}_{13}$

$$F_{13}(e) = F_1(e) = F_{12}(e) = F_2(e) = F_{23}(e) = F_3(e)$$

setzen. Offensichtlich ist

$$F_{13} \subset F_1 \text{ und } F_{13} \subset F_3.$$

Durch die Relation $\sim$ gewinnen wir also eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{F}$ in zueinander fremde Klassen. Jede Klasse heißt eine Schichtung von Σ.

Die Cohomologiegruppe von Σ werden wir in der Form

$$\mathfrak{B}(\Sigma) = \sum_{U \in W} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_{U,n}(\Sigma)$$

definieren. W ist hierin die Menge aller Schichtungen von Σ.

Wir brauchen hierzu nur zu jeder Schichtung U und jeder ganzen Zahl $n \geqq -1$ das zugehörige „Glied" der direkten Summe zu erklären. Dabei verfahren wir ähnlich wie bei der Definition der Limesgruppe eines direkten Systems von Gruppenhomomorphismen. Die Schichtung U und die ganze Zahl $n \geqq -1$, sowie der zugrunde gelegte Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ sind im Folgenden unveränderlich.

$\mathfrak{f}$ sei die Menge aller Funktionen f, zu welchen es ein $F \in U$ von folgender Beschaffenheit gibt:

1. Der Definitionsbereich von f stimmt mit dem Definitionsbereich T von F überein.

2. f ordnet jedem $e \in \mathsf{T}$ ein

$$f(e) \in \mathfrak{B}_{F(e),n}(Q(e), P(e), K(e))$$

zu, so daß für die Elemente e und $e' > e$ von T

$$f(e') = h_n(F; e', e) f(e)$$

ist.

Sind f' und f Elemente von $\mathfrak{f}$ mit den Definitionsbereichen T' und T, so schreiben wir

$$f' \subset f,$$

wenn $\mathsf{T}' \subset \mathsf{T}$ und für jedes $e \in \mathsf{T}'$

$$f(e) = f'(e)$$

ist.

Zwei Funktionen f_1 und f_2 von $\mathfrak{f}$ heißen äquivalent

$$f_1 \sim f_2,$$

wenn es ein $f_{12} \in \mathfrak{f}$ gibt mit

$$f_{12} \subset f_1 \text{ und } f_{12} \subset f_2.$$

Genau wie für $\mathfrak{F}$ zeigt man, daß $\sim$ eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{f}$ in zueinander fremde Klassen hervorruft.

Die Menge aller dieser Klassen machen wir zu einer Abelschen Gruppe, welche wir zur n-ten Cohomologiegruppe $\mathfrak{B}_{U,n}(\sum)$ der Schichtung U des Spektrums $\sum$ erklären.

Sind a_1 und a_2 Elemente von E, so bestimmen wir $a_1 + a_2 \in E$ folgendermaßen:

Zu a_1 und a_2 gehören nach Voraussetzung zwei Elemente $F_1 \in U$ und $F_2 \in U$ mit den Eigenschaften (1) und (2). Wir bestimmen ein $F \in U$ (Definitionsbereich T) mit $F \subset F_1$ und $F \subset F_2$, und wählen aus a_1 und a_2 zwei Repräsentanten f_1 und f_2 aus. Das Element $g \in \mathfrak{f}$ mit dem Definitionsbereich T sei dann durch die Relation

$$g(e) = f_1(e) + f_2(e) \qquad (e \in \mathsf{T})$$

festgelegt. Die durch g bestimmte Klasse von E sei $a_1 + a_2$. Es läßt sich zeigen, daß $a_1 + a_2$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

Denn gehen wir von $F' \in U$ mit $F' \subset F_1$ und $F' \subset F_2$ und den Repräsentanten $f_1' \in a_1$ und $f_2' \in a_2$ aus, so gibt es zunächst ein $F'' \in U$ (Definitionsbereich T'') mit $F'' \subset F$ und $F'' \subset F'$. Wir konstruieren ein Element $g'' \in \mathfrak{f}$ mit dem Definitionsbereich T'', indem wir

$$g''(e) = f_1(e) + f_2(e) = f_1'(e) + f_2'(e) \qquad (e \in \mathsf{T}'')$$

festlegen.

Es ist dann

$$g'' \subset g, \quad g'' \subset g',$$

woraus $g \sim g'$ folgt, wie zu zeigen war.

Durch die Operation $+$ wird E zu einer Abelschen Gruppe.

Ein Teilspektrum $\sum'$ von $\sum$ heißt *vollständiges* Teilspektrum von $\sum$, wenn es zu jedem $e \in \sum$ ein $e' \in \sum'$ gibt mit $e' \geqq e$.

Wir erklären eine ein-eindeutige Abbildung J der Menge aller Schichtungen von $\sum'$ auf die Menge aller Schichtungen von $\sum$. Ist U' eine beliebige Schichtung von $\sum'$, so wählen wir aus ihr einen Repräsentanten F' aus. Natürlich ist $F' \in \mathfrak{F}$; F' ist also Element einer Schichtung U von $\sum$.

Wir setzen

$$U = JU'.$$

U ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Denn sind F_1' und F_2' Repräsentanten von U', so gibt es ein F_{12}' mit

$$F_{12}' \subset F_1', \quad F_{12}' \subset F_2'.$$

Wegen $F_{12}' \in \mathfrak{F}$ gehören F_1' und F_2' derselben Schichtung von $\sum$ an.

Ist U eine Schichtung von $\sum$, so gibt es eine Schichtung U' von $\sum'$, für welche

$$U = JU'$$

ist. Denn für einen beliebigen Repräsentanten von U mit dem Definitionsbereich T setzen wir F' (Definitionsbereich $\sum'$) durch

$$F'e = Fe \qquad (e \in \mathsf{T} \cap \sum)$$

fest.

Aus $$U = JU_1', \; U = JU_2'$$
folgt $$U_1' = U_2'.$$

Denn sind F_1' und F_2' Repräsentanten von U_1' und U_2', so ist $F_1' \in U$ und $F_{22}' \in U$. Es existiert also ein F_{12}' mit

$$F_{12}' \subset F_1', \; F_{12}' \subset F_2'.$$

Das bedeutet aber $U_1' = U_2'$.

Damit ist die Ein-eindeutigkeit von J bewiesen.

Satz 31. *Ist $\sum'$ ein vollständiges Teilspektrum von $\sum$, so ist die Cohomologiegruppe von $\sum'$ bezüglich der Abbildung J und der identischen Abbildung der ganzen Zahlen auf sich gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe von $\sum$, wenn beidemal derselbe Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ benutzt wird.*

Beweis. Wir geben eine ein-eindeutige Abbildung I von $\mathfrak{B}_{U',n}(\sum')$ auf $\mathfrak{B}_{U,n}(\sum)$ an: Aus jedem Element $a \in \mathfrak{B}_{U',n}(\sum')$ wählen wir einen Repräsentanten f aus. f liegt in einem Element b von $\mathfrak{B}_{U,n}(\sum)$. Wir setzen

$$Ia = b.$$

Die Unabhängigkeit der Zuordnung I von der Wahl der Repräsentanten, sowie die Ein-eindeutigkeit von I wird genau so wie für die Abbildung J bewiesen.

Überdies ist I ein Isomorphismus. Denn sind a_1, a_2 und a_{12} Elemente von $\mathfrak{B}_{U',n}(\sum')$, f_1 und f_2 Repräsentanten von a_1 und a_2, so folgt aus der Beziehung

$$a_1 + a_2 = a_{12},$$

daß $f_1 + f_2$ Repräsentant von a_{12} ist. Das ergibt

$$Ia_1 + Ia_2 = Ia_{12}.$$

Einen sehr einfachen Spezialfall der Spektren erhalten wir, wenn wir annehmen, daß $\sum$ nur ein Element e enthält. Es können dann e eine beliebige Menge $M(e)$ und drei beliebige simpliziale Komplexe mit $Q(e) \subset P(e) \subset K(e)$, auf $M(e)$ zugeordnet sein. Die Schichtungen von $\sum$ und die zu $K(e)$ regulären Schichtungen von $M(e)$ lassen sich in trivialer Weise ein-eindeutig einander zuordnen. Natürlich besteht gliedweise Isomorphie zwischen der Cohomologiegruppe von $\sum$ und der Cohomologiegruppe von K mod $K \vdash P$ in $K \vdash Q$, wenn beiden derselbe Koeffizientenbereich zugrunde liegt.

Zwei Spektren $\sum$ und $\sum'$ heißen isomorph, wenn eine Abbildung J und zu jedem e eine Abbildung $I(e)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. J ist eine ein-eindeutige Abbildung von $\sum$ auf $\sum'$.
2. $I(e)$ ist eine ein-eindeutige Abbildung von $M(e)$ auf $M(Je)$.
3. $I(e)$ erzeugt einen Isomorphismus von $Q(e)$ auf $Q(Je)$, von $P(e)$ auf $P(Je)$ und von $K(e)$ auf $K(Je)$.

4. Ist $e < e'$, so soll die Abbildung Z, die jeder Projektion π von e' in e die Abbildung $I(e)^{-1}\,\pi\,I(e')$ von $M(Je')$ in $M(Je)$ zuordnet, eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller Projektionen von e' in e auf die Menge aller Projektionen von Je' in Je sein.

Unmittelbar aus der Definition folgt, daß diese Isomorphiebeziehung reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Die Abbildung J und die Gesamtheit der Abbildungen $I(e)$ bezeichnen wir als eine Isomorphie I von $\sum$ auf $\sum'$.

Mit Hilfe von I kann man in naheliegender Weise eine ebenfalls mit I bezeichnete ein-eindeutige Abbildung der Menge aller Schichtungen von $\sum$ auf die Menge aller Schichtungen von $\sum'$ definieren.

Es gilt

Satz 32. *Ist I eine Isomorphie des Spektrums $\sum'$ auf das Spektrum $\sum$, so ist die Cohomologiegruppe von $\sum'$ mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ bezüglich I und der identischen Abbildung der ganzen Zahlen auf sich gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe von $\sum$ mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.*

XI. Überdeckungsfamilien.

T, S, R seien drei topologische Räume[11]), die der Bedingung $T \subset S \subset R$ unterworfen sind.

Sind $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U}$ zwei Überdeckungen von R, so heißt $\mathfrak{U}'$ Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, wenn es zu jedem $U' \in \mathfrak{U}'$ ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt mit $U' \subset U$. Wir schreiben hierfür auch

$$\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}'.$$

Jedes System $\sum$ von Überdeckungen von R wird durch die Relation $\leqq$ teilweise geordnet. Hat das System $\sum$ die Eigenschaft, daß es zu je zwei Überdeckungen eine gemeinsame Verfeinerung enthält, so heißt $\sum$ eine Familie von Überdeckungen von R. Eine Familie $\sum$ läßt sich auf zweierlei Weise zu einem Spektrum erweitern, welches mit $\sum_I(T, S)$ bzw. $\sum_{II}(T, S)$ bezeichnet wird.

I. Es sei $\mathfrak{U} \in \sum$; wir verwenden als Menge $M(\mathfrak{U})$ die Überdeckung $\mathfrak{U}$ selbst. Als Komplex $Q(\mathfrak{U})$ erklären wir den Nerven von $\mathfrak{U}$ in T: Das ist die Menge aller Simplexe s auf der Menge $\mathfrak{U}$, für welche der Durchschnitt

$$D(s) \cap T \neq 0$$

nicht leer ist. Rechnen wir zu $Q(\mathfrak{U})$ außerdem die leere Menge, so ist $Q(\mathfrak{U})$ offenbar simplizial. Analog werden die simplizialen Komplexe $P(\mathfrak{U})$ (in bezug auf S), und $K(\mathfrak{U})$ (in bezug auf R) definiert.

[11]) Definition des topologischen Raumes nach N. Bourbaki.

Ist $\mathfrak{U}'$ Verfeinerung von $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}'$, so soll jede eindeutige Abbildung π von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$, welche

$$U' \subset U = \pi U' \text{ für jedes } U' \in \mathfrak{U}'$$

erfüllt, eine Projektion von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$ sein. Nach Definition der Verfeinerung ist die Menge aller Projektionen von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$ nicht leer. Das zeigt man mit Hilfe des Auswahlpostulates.

Ist π' eine Projektion von $\mathfrak{U}''$ in $\mathfrak{U}'$ und π eine Projektion von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$, so ist $\pi'\pi$ eine Projektion von $\mathfrak{U}''$ in $\mathfrak{U}$. Sind ferner π_1 und π_2 zwei Projektionen von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$, und ist s ein Simplex von $Q(\mathfrak{U})$ bzw. $P(\mathfrak{U})$ bzw. $K(\mathfrak{U})$, dann folgt

$$D(\pi_1 s) \cap T \supset D(s) \cap T \neq 0$$

und

$$D(\pi_1 s \cup \pi_2 s) \cap T \supset D(s) \cap T \neq 0.$$

(Analoge Gleichungen gelten für S und R.)

Damit ist nachgewiesen, daß je zwei Projektionen von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$ äquivalente simpliziale Abbildungen von $Q(\mathfrak{U}')$ in $Q(\mathfrak{U})$, von $P(\mathfrak{U}')$ in $P(\mathfrak{U})$ und von $K(\mathfrak{U}')$ in $K(\mathfrak{U})$ hervorrufen.

Das Spektrum $\sum_I(T, S)$ haben wir so vollständig definiert.

II. Bei der zweiten Art treten in der Menge $M(\mathfrak{U})$ an die Stelle der Überdeckungselemente die Punkte des Raumes R selbst. Ist $\mathfrak{U} \in \sum$, so sei $M(\mathfrak{U}) = R$. $Q(\mathfrak{U})$ wird so erklärt: Die Teilmenge $s \subset T$ sei genau dann Simplex von $Q(\mathfrak{U})$, wenn es ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt mit $s \subset U$. Analog werden $P(\mathfrak{U})$ und $K(\mathfrak{U})$ definiert.

Ist $\mathfrak{U}'$ Verfeinerung von $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}'$, so soll die identische Abbildung von R auf sich und nur diese Projektion π von $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{U}$ heißen. Es ist leicht einzusehen, daß π eine simpliziale Abbildung von $Q(\mathfrak{U}')$ in $Q(\mathfrak{U})$, von $P(\mathfrak{U}')$ in $P(\mathfrak{U})$ und von $K(\mathfrak{U}')$ in $K(\mathfrak{U})$ erzeugt. Damit ist $\sum_{II}(S, T)$ definiert.

$\mathfrak{G}$ sei nun eine beliebige Abelsche Gruppe und $\sum$ eine Familie von R. Wir nennen $\mathfrak{B}(\sum_I(S, T); \mathfrak{G}; R)$ bzw. $\mathfrak{B}(\sum_{II}(S, T); \mathfrak{G}; R)$ die Cohomologiegruppe I bzw. II von R mod $R \vdash S$ in $R \vdash T$ bezüglich $\sum$ mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

Ist $T = 0$, $S = R$, so schreiben wir einfach

$$\mathfrak{B}(\sum_I; \mathfrak{G}; R) \text{ und } \mathfrak{B}(\sum_{II}; \mathfrak{G}; R)$$

und sprechen von der Cohomologiegruppe I bzw. II von R bezüglich $\sum$ mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

Ist $\sum$ eine topologisch ausgezeichnete Familie von Überdeckungen, so sind die eben definierten zugehörigen Gruppen topologisch invariant. D. h.: Gibt es eine topologische Abbildung von R in R', welche die Räume $T \subset S \subset R$ beziehungsweise in die Räume $T' \subset S' \subset R'$ überführt, so sind entsprechende Cohomologiegruppen bezüglich $\sum$ gliedweise isomorph. Es sollen nun einige Typen topologisch ausgezeichneter Familien aufgezählt werden:

1. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ seien zwei Mengen von Mächtigkeiten, welche folgende Bedingungen erfüllen: Enthält $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}'$ eine endliche Zahl, so soll $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}'$ sämtliche endlichen Zahlen enthalten. Die Mächtigkeit von $\{R\}$ sei obere Schranke von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$. $\sum_0(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ bestehe aus allen offenen Überdeckungen $\mathfrak{U}$, für welche

a) die Mächtigkeit von $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{C}$ gehört

und b) die Mächtigkeit eines jeden Simplexes $s \in K(\mathfrak{U})$ zu $\mathfrak{C}'$ gehört.

Sonderfälle von 1) sind:

2. Die Familie $\sum_0$, die aus allen offenen Überdeckungen von R besteht.

3. Die Familie Γ_0, zu welcher alle endlichen offenen Überdeckungen von R zählen.

4. Die Familie $\tilde{\Gamma}_0$ bestehe aus allen Überdeckungen folgender Eigenschaften:

a) $\mathfrak{U}$ ist abzählbar;

b) höchstens endlich viele Elemente von $\mathfrak{U}$ besitzen einen nicht leeren Durchschnitt.

Die Γ_0 und $\tilde{\Gamma}_0$ entsprechenden Spektren besitzen nur eine Schicht, nämlich ihre Nullschicht.

Ersetzt man in allen angeführten Familien die offenen Mengen durch die abgeschlossenen Mengen von R, so erhält man natürlich ebenfalls topologisch ausgezeichnete Familien. Sie sollen mit $\sum_a$, $\sum_a(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ usw. bezeichnet werden.

Γ_0 ist die von E. Čech zur Definition der Homologiegruppe eines beliebigen topologischen Raumes verwandte Überdeckungsfamilie.

Das zur Nullschichtung von $\sum_0$ gehörige Glied von $\mathfrak{B}(\sum_0 n; \mathfrak{G}; R)$ entspricht dem Verfahren von J. W. Alexander.

$\sum$ sei eine Familie von Überdeckungen von R. $\sum'$ heißt eine vollständige Teilfamilie von $\sum$, wenn $\sum' \subset \sum$ ist, und es zu jeder Überdeckung $\mathfrak{U} \in \sum$ eine Verfeinerung $\mathfrak{U}' \in \sum'$ gibt. Die von $\sum'$ erzeugten Spektren sind vollständige Teilspektren der entsprechenden von $\sum$ erzeugten Spektren.

Aus Satz 31 ergibt sich

Satz 33. *Ist $\sum'$ eine vollständige Teilfamilie von $\sum$, so ist die Cohomologiegruppe von R bezüglich $\sum$ mod $R \vdash S$ in $R \vdash T$ mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ gliedweise isomorph der entsprechenden Cohomologiegruppe bezüglich $\sum$.*

Ist der Raum R bikompakt, dann ist Γ_0 nach Definition vollständige Teilfamilie von $\sum_0$. Ist umgekehrt für den Raum R Γ_0 vollständige Teilfamilie von $\sum_0$, dann muß R bikompakt sein.

Es folgt also

Satz 34. *Ist der Raum R bikompakt, so ist die Cohomologiegruppe von R bezüglich $\mathfrak{G}$ mod $R \vdash S$ in $R \vdash T$ im Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ gliedweise isomorph der entsprechenden Cohomologiegruppe bezüglich Γ_0.*

Für einen bikompakten Raum kommt es also nur auf die Nullschichtung von $\sum_0$ an.

XII. Komplexe als diskrete Räume.

K sei ein beliebiger simplizialer Komplex auf der Menge M. Wir machen ihn zu einem diskreten topologischen Raum [12]; d. h. genauer: Wir ordnen K einen diskreten topologischen Raum $\tilde{K}$ zu, der — abgesehen vom leeren Simplex, welches wir aus formalen Gründen ausschließen müssen — dieselben Elemente wie K enthält: Eine Teilmenge Q von $\tilde{K}$ ist genau dann offen, wenn sie zu jedem $S \in Q$ jedes Simplex $t \in K$ mit $s \subset t$ enthält. Ist $a \in \mathfrak{R}$, so bezeichne $U(a)$ diejenige offene Menge von $\tilde{K}$, welche aus allen Simplexen s mit $a \in s$ besteht. Die Menge aller offenen Mengen $U(a)$ ist eine offene Überdeckung von $\tilde{K}$. Sie werde mit $\mathfrak{U}_0$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von $\tilde{K}$, so ist $\mathfrak{U}_0$ Verfeinerung von $\mathfrak{U}$. Denn ist $a \in \mathfrak{R}$ beliebig gewählt, so gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$, welches das Simplex (a) enthält. Es ist $U(a) \subset U$. Die nur aus $\mathfrak{U}_0$ bestehende Familie ist demnach vollständige Teilfamilie von $\sum_0$. Nun ist der Nerv von $\mathfrak{U}_0$ dem Komplex K isomorph: Die nicht leere Teilmenge s von M gehört nämlich genau dann zu K, wenn der Durchschnitt aller $U(a)$ mit $a \in s$ nicht leer ist. Also vermittelt die Zuordnung $a \to U(a)$ einen Isomorphismus.

Wir haben somit folgenden Satz gefunden:

Satz 35. *Die Cohomologiegruppe l von $\tilde{K}$ bezüglich $\sum_0$ mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ ist gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe des Komplexes K mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.*

Es gibt also zu jedem Komplex einen topologischen Raum mit gliedweise isomorpher Cohomologiegruppe.

Wir wenden uns jetzt der Familie Γ_0 zu. Wir wollen zeigen, daß man mit Hilfe von Γ_0 über die Struktur von K in den von der Nullschicht verschiedenen Schichten nichts aussagen kann. Genauer ausgedrückt: Stimmen zwei Komplexe, die sich sonst beliebig unterscheiden können, in der Nullschicht überein, so besitzen die zugehörigen topologischen Räume isomorphe Cohomologiegruppen bezüglich Γ_0. So sind z. B. die Cohomologiegruppen von K und KO_M bezüglich $\tilde{\Gamma}_0$, beidemal mit demselben Koeffizientenbereich, isomorph. Bezüglich $\sum_0$ ist das im allgemeinen keineswegs der Fall. Wir werden also zu einer weitergehenden Klassifizierung der topologischen Räume gelangen, wenn wir Familien wie $\sum_0$ mit heranziehen.

Zum Beweis der aufgestellten Behauptung benötigen wir zuerst folgende Definitionen:

Ist Q eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{R}$, so bezeichnen wir mit $U(Q)$ die offene Menge von $\tilde{K}$, die aus allen $s \in \tilde{K}$ besteht, zu welchen es ein $a \in Q$ gibt mit $a \in s$.

[12] Nach ALEXANDROFF bezeichnet man einen topologischen Raum als diskret, wenn der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen offen ist.

Die Menge $\mathfrak{U}^*$, die aus allen offenen Mengen der Form $U(Q)$ besteht, ist natürlich eine offene Überdeckung von $\tilde{K}$.

$\mathfrak{U}$ sei eine beliebige endliche offene Überdeckung von $\tilde{K}$. Wir bilden die Menge T aller Teilmengen Q von $\mathfrak{K}$ folgender Eigenschaft: Es gibt ein $U \in \mathfrak{U}$, für welches Q die Menge aller $a \in \mathfrak{K}$ mit $(a) \in U$ ist.

Mit Hilfe von T geben wir eine endliche offene Überdeckung $\mathfrak{V}$ an: Sie bestehe aus allen $U(Q)$ mit $Q \in T$. $\mathfrak{V}$ ist Verfeinerung von $\mathfrak{U}$. Die Familie Γ_0^* aller endlichen offenen Überdeckungen $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}^*$ ist also eine vollständige Teilfamilie von Γ_0.

Satz 36. *K und K' seien zwei simpliziale Komplexe auf den Mengen M bzw. M'. Sind $K \cap O_M$ und $K' \cap O_{M'}$ isomorph, so ist die Cohomologiegruppe von $\tilde{K}$ bezüglich Γ_0 mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ isomorph der entsprechenden Cohomologiegruppe von $\tilde{K}'$.*

Beweis. π sei eine Eckenzuordnung, die $K \cap O_M$ auf $K' \cap O_{M'}$ isomorph abbildet. Jeder Teilmenge Q von $\mathfrak{K}$ entspricht eine Teilmenge $Q' = \pi Q$ von $\mathfrak{K}'$ und umgekehrt.

Der offenen Menge $U(Q)$ ordnen wir die offene Menge

$$\pi U(Q) = U(\pi Q)$$

zu. Der Überdeckung $\mathfrak{V} \in \Gamma_0^*$ ordnen wir die Überdeckung $\mathfrak{V}' = \pi \mathfrak{V}$ zu, die aus allen $U' = \pi U (U \in \mathfrak{V})$ besteht. Diese ein-eindeutige Abbildung von Γ_0^* auf $\Gamma_0^{*'}$ definiert einen Isomorphismus des zu Γ_0^* gehörigen Spektrums auf das zu $\Gamma_0^{*'}$ gehörige Spektrum. Da die Familien Γ_0^* und $\Gamma_0^{*'}$ vollständige Teilfamilien von Γ_0 und Γ_0' sind, ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 31. Mai 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 2, S. 167—182 (1952).

Über Stetigkeit von Integraltransformationen.

Von

Karl Zeller in Tübingen.

Inhaltsübersicht.

Seite

§ 1. Einleitung 167
§ 2. Bezeichnungen 168
§ 3. F-Räume 170
§ 4. F-Systeme 170
§ 5. Die F-Systeme M und P 172
§ 6. Beispiele für Räume aus M und P 173
§ 7. Der Hauptsatz 175
§ 8. F_σ-Räume 176
§ 9. Abbildungen mit Folgen von Operationen 177
§ 10. Ein Permanenzsatz 178
§ 11. Schlußbemerkungen 180

§ 1.

Einleitung.

Wir betrachten Integraltransformationen der Form

$$(*) \qquad y(s) = \gamma(s) \cdot x(s) + \int_0^{\to\infty} \Gamma(s,t)\, x(t)\, dt \qquad (0 \leqq s < \infty).$$

Dabei sind x, γ und Γ komplexwertige, meßbare Funktionen; und es ist $\int_0^{\to\infty} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T$ gesetzt, wo $\int_0^T$ — wie auch alle später vorkommenden Integrale — im Lebesgueschen Sinne aufzufassen ist. Das wichtigste Ergebnis der Arbeit (Satz 7. 1) lautet nun: Ordnet die Transformation (*) jedem $\mathfrak{x} = x(t)$ aus einem F-Raum im Sinne von Banach [3] (S. 35) ein $\mathfrak{y} = y(s)$ aus einem ebensolchen Raum zu, so ist diese Abbildung stetig. Hierbei werden noch einige Zusatzvoraussetzungen gemacht, die im wesentlichen besagen, daß die betreffenden Funktionenräume in „natürlicher" Weise als F-Räume aufgefaßt werden.

Der Beweis von 7. 1 beruht auf der Theorie der F-Systeme — das sind Mengen von „verwandten" F-Räumen, siehe § 4 — und auf dem Begriff der „fehlkonvergenzfreien" Abbildung (siehe § 2). Eine grundlegende Rolle spielt ein Satz aus Banach [3] (Th. 7, S. 41, hier Satz 3. 5).

Die Theorie der F-Systeme ist auch für sich allein von Interesse. Sie verallgemeinert Sätze, die vom Verfasser in einer früheren Arbeit [12] für Räume von Zahlenfolgen aufgestellt wurden.

Weiter führen wir die F_σ-Räume ein: Ein F_σ-Raum ist die mit einem geeigneten Konvergenzbegriff versehene Vereinigung abzählbar vieler F-Räume (§ 8). Satz 7. 1 wird auf F_σ-Räume verallgemeinert.

Schließlich stellen wir einen Permanenzsatz für Integraltransformationen, wobei wir die erweiterte Form von 7. 1 verwenden.

§ 2.

Bezeichnungen.

Wir gebrauchen die Symbole $\rightsquigarrow$ (daraus folgt), $\leftsquigarrow$ (folgt aus), $\leftrightsquigarrow$ (gleichbedeutend).

Wir betrachten Mengen $\mathfrak{W}, \mathfrak{Z}, \ldots$ mit Elementen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$, komplexe Zahlen $a, b, \ldots$, sowie gewisse Strukturen auf Mengen.

Eine Menge $\mathfrak{W}$ heißt ein *(komplexer) linearer Raum*, wenn in $\mathfrak{W}$ zwei Verknüpfungen $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$ (a komplex) erklärt sind, die noch gewissen Gesetzen genügen (siehe Banach [3], S. 26). In bekannter Weise wird der Begriff „linearer Unterraum" definiert.

Eine Menge $\mathfrak{W}$ heißt ein Raum $\mathfrak{W} = [\mathfrak{W}; \mathcal{W}]$ mit einem *Konvergenzbegriff* $\mathcal{W}$, wenn in $\mathfrak{W}$ eine Vorschrift definiert ist, die gewisse Folgen $\mathfrak{x}_n$ in $\mathfrak{W}$ als konvergent gegen ein eindeutig bestimmtes Grenzelement $\mathfrak{x}$ auszeichnet. Bezeichnung der Konvergenz:

$$\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{W}; \mathcal{W}], \quad \lim \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}\,[\mathfrak{W}], \text{ usw.}$$

Unter einer *F-Norm* φ in einem linearen Raum $\mathfrak{W}$ verstehen wir ein Funktional mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi(\mathfrak{x}) \geqq 0,$$

$$\varphi(\mathfrak{x}) = 0 \leftsquigarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{o} \text{ (Nullelement)},$$

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(-\mathfrak{x}),$$

$$\varphi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq \varphi(\mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{y}),$$

$$h_n \to 0 \rightsquigarrow \varphi(h_n \mathfrak{x}) \to 0 \quad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{W},\ h_n \text{ komplex}),$$

$$\varphi(\mathfrak{x}_n) \to 0 \rightsquigarrow \varphi(h\,\mathfrak{x}_n) \to 0 \quad (\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{W},\ h \text{ komplex}).$$

Mit Hilfe der F-Norm definieren wir einen Konvergenzbegriff:

$$\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{W}] \leftsquigarrow \varphi(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}) \to 0.$$

Der lineare Raum $\mathfrak{W}$ zusammen mit der F-Norm φ und dem durch sie definierten Konvergenzbegriff heißt ein *F-normierter Raum* $\mathfrak{W} = [\mathfrak{W}; \varphi]$.

Wir gebrauchen die Bezeichnung $\mathfrak{W}$ sowohl für eine Menge als auch für diese Menge zusammen mit irgendwelchen auf ihr definierten

Strukturen. Nur in Zweifelsfällen werden diese Strukturen näher angegeben (z. B. $[\mathfrak{W}; \mathfrak{W}]$, $[\mathfrak{W}; \varphi]$). Soll betont werden, daß $\mathfrak{W}$ als ein Raum mit Konvergenzbegriff aufzufassen ist, so schreiben wir auch $[\mathfrak{W}]$.

In einem F-normierten Raum $[\mathfrak{W}; \varphi]$ heißt eine Folge $\mathfrak{x}_n$ *konzentriert*, wenn $\lim_{m,n \to \infty} \varphi(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_n) = 0$ ist. $[\mathfrak{W}; \varphi]$ heißt *vollständig*, wenn jede konzentrierte Folge konvergent (gegen ein Grenzelement) ist; wir nennen dann $[\mathfrak{W}; \varphi]$ auch kurz einen *F-Raum*.

Wir beschränken uns also nicht auf lokalkonvexe F-Räume (für diesen Begriff vgl. man etwa [10]). Von Banach [3] weichen wir insofern ab, als wir komplexe F-Räume betrachten. Die aus [3] übernommenen Sätze gelten auch für komplexe F-Räume.

Für den Begriff „*magere Menge*" (= Menge I. Kategorie) verweisen wir auf Banach [3], S. 13. Die Kenntnis dieses Begriffs ist für das Verständnis der Arbeit nicht nötig.

Die Ausdrucksweise „Φ ist eine *Operation aus* $\mathfrak{W}$ *in* $\mathfrak{Z}$" bedeutet: „Der genaue Erklärungsbereich von Φ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{W}$; Φ bildet diese in $\mathfrak{Z}$ ab. Die Aussage „Φ bildet $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{Z}$ ab" soll hingegen nicht ausschließen, daß Φ auch für Elemente $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{W}$ erklärt ist.

Im folgenden Teil von § 2 bedeutet Φ eine Operation aus $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{Z}$. Ist $\mathfrak{X} \leqq \mathfrak{W}$, $\mathfrak{Y} \leqq \mathfrak{Z}$, so bezeichnen wir mit $\Phi\mathfrak{X}$ die Menge der in der Form $\mathfrak{z} = \Phi\mathfrak{x}$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{X})$ darstellbaren $\mathfrak{z}$, mit $\Phi^U\mathfrak{Y}$ ($\Phi^U\mathfrak{Y}$ = Φ-Urbild von $\mathfrak{Y}$) die Menge der $\mathfrak{x}$ mit $\Phi\mathfrak{x} \in \mathfrak{Y}$. Insbesondere ist $\Phi^U\mathfrak{Z}$ der genaue Erklärungsbereich von Φ. Ist $\Phi^U\mathfrak{Z} = \mathfrak{W}$, so heißt Φ eine Operation *von* $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{Z}$; ist $\Phi\mathfrak{W} = \mathfrak{Z}$, so heißt Φ eine Operation aus (von) $\mathfrak{W}$ *auf* $\mathfrak{Z}$.

Sind $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{Z}$ lineare Räume, so heißt Φ linear, wenn $\Phi^U\mathfrak{Z}$ ein linearer Unterraum von $\mathfrak{W}$ ist und $\Phi(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \Phi\mathfrak{x} + \Phi\mathfrak{y}$, $\Phi(a\mathfrak{x}) = a \cdot \Phi\mathfrak{x}$ gilt.

Sind $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zwei Räume mit Konvergenzbegriffen, so heißt Φ $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-*stetig*, wenn Φ $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ abbildet und aus $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{X}]$ folgt $\Phi\mathfrak{x}_n \to \Phi\mathfrak{x}\,[\mathfrak{Y}]$. Φ heißt $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-*fehlkonvergenzfrei*, wenn Φ $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ abbildet und aus $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{X}]$, $\Phi\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{y}\,[\mathfrak{Y}]$ folgt $\mathfrak{y} = \Phi\mathfrak{x}$.

Sind ferner W und Z Mengen von Räumen, die Untermengen von $\mathfrak{W}$ bzw. $\mathfrak{Z}$ sind und irgendwelche Konvergenzbegriffe haben, so bedeutet (für die Operation Φ):

$\mathsf{W}\mathfrak{Y}$-stetig: Bildet Φ ein $\mathfrak{E} \in \mathsf{W}$ in $\mathfrak{Y}$ ab, so ist Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{Y}$-stetig.

$\mathsf{W}\mathsf{Z}$-stetig: Bildet Φ ein $\mathfrak{E} \in \mathsf{W}$ in ein $\mathfrak{G} \in \mathsf{Z}$ ab, so ist Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-stetig.

M. a. W: Ist durch Φ eine Abbildung der genannten Art überhaupt definiert, so ist sie sogar stetig. Nicht verlangt ist also dabei, daß Φ in allen Räumen $\mathfrak{F} \in \mathsf{W}$ erklärt ist. Entsprechend definieren wir $\mathsf{W}\mathfrak{Y}$- und $\mathsf{W}\mathsf{Z}$-fehlkonvergenzfrei. Ist Φ ein Funktional, $\mathfrak{Z}$ also der Raum der komplexen Zahlen (versehen mit dem üblichen Konvergenzbegriff), so gebrauchen wir kürzer die Bezeichnungen $\mathfrak{W}$-stetig, W-stetig usw. an Stelle von $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}$-stetig, $\mathsf{W}\mathfrak{Z}$-stetig usw.

§ 3.

F-Räume.

Wir benötigen einige bekannte Hilfssätze über F-Räume und F-normierte Räume.

Hilfssatz 3.1. *Zwei F-Normen φ und ψ definieren in einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ genau dann denselben Konvergenzbegriff, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\mathfrak{x}_n) = 0 \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \psi(\mathfrak{x}_n) = 0$$

ist. Gilt diese Beziehung, so ist auch jede in $[\mathfrak{E}; \varphi]$ konzentrierte Folge in $[\mathfrak{E}; \psi]$ konzentriert, und umgekehrt.

Hilfssatz 3.2. *Eine in dem F-normierten Raum $[\mathfrak{E}; \varphi]$ konzentrierte Folge $\mathfrak{x}_n$ enthält eine Teilfolge $\mathfrak{y}_n$ mit $\sum \varphi(\mathfrak{y}_n - \mathfrak{y}_{n+1}) < \infty$. $[\mathfrak{E}; \varphi]$ ist genau dann vollständig, wenn jede Folge mit letzterer Eigenschaft konvergent (gegen ein Grenzelement) ist.*

In den folgenden Sätzen bedeuten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ F-Räume, Φ eine Operation von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 3.3. *Gilt mit irgendwelchen Mengen $\mathfrak{D}_p$ $(p = 0, 1, \ldots)$ die Gleichung $\mathfrak{E} = \bigcup \mathfrak{D}_p$, so ist mindestens eine der Mengen $\mathfrak{D}_p$ nicht mager in $[\mathfrak{E}]$.*

Satz 3.4. *Φ sei linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-stetig. Dann ist entweder $\Phi\mathfrak{E} = \mathfrak{G}$ oder $\Phi\mathfrak{E}$ mager in $[\mathfrak{G}]$.*

Hilfssatz 3.5. *Φ sei linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-fehlkonvergenzfrei. Dann ist Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-stetig.*

Beweise. 3.1 und 3.2 sind trivial. 3.3: Folgt aus Banach [3], S. 14, Th. 2. 3.4 und 3.5: Siehe Banach [3], S. 38, Th. 3 bzw. S. 41, Th. 7.

3.1 wird verwendet, um F-Normen in einfachere Gestalt zu bringen: Die F-normierten Räume $[\mathfrak{E}; \varphi]$ und $[\mathfrak{E}; \psi]$ sind für unsere Zwecke gleichbedeutend. 3.2 ist ein wertvolles Mittel für Vollständigkeitsbeweise. Auf 3.3, 3.4 und 3.5 baut die folgende Theorie der F-Systeme auf. Eine zentrale Stellung nimmt 3.5 ein (vgl. § 4 und die Bemerkungen zu 8.2).

§ 4.

F-Systeme.

Sei $\mathfrak{W} = [\mathfrak{W}; \mathcal{W}]$ ein linearer Raum mit einem Konvergenzbegriff. Unter dem von $\mathfrak{W}$ erzeugten *F-System* W verstehen wir die Menge der Räume $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi]$ mit folgenden Eigenschaften:

$\mathfrak{E}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathfrak{W}$ und (bei gleicher Erklärung der Verknüpfungen $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$) ein F-Raum, in dem 4.1 gilt.

Eigenschaft 4.1. *Aus $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}; \varphi]$ folgt $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{W}]$.*

Es wird nicht verlangt, daß $\mathfrak{W}$ ein F-Raum ist. $\mathcal{W}$ muß gewissen Bedingungen genügen, damit W nicht leer ist. Jeder Raum $\mathfrak{E} \in \mathsf{W}$ erzeugt seinerseits ein i.a. weniger umfassendes System E.

Wir sagen, daß eine *Menge* $\mathfrak{X}$ zu W gehört, wenn sie in geeigneter Weise als F-Raum aus W aufgefaßt werden kann. Die Angabe der F-Norm eines Raumes aus W ist wegen 4.5 meist überflüssig.

Wir untersuchen, welche Untermengen von $\mathfrak{W}$ zu W gehören und welche Beziehungen zwischen den Räumen aus W bestehen.

W und Z seien die von zwei Räumen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{Z}$ erzeugten F-Systeme, Φ eine Operation aus $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{Z}$. Dann gelten folgende Sätze:

Satz 4.2. *Gilt* $[\mathfrak{E}_p; \varphi_p] \in \mathsf{W}$ $(p = 0, 1, \ldots)$, *so ist*

$$\left[\bigcap \mathfrak{E}_p; \sum 2^{-p} \frac{\varphi_p}{1+\varphi_p}\right] \in \mathsf{W}$$

und für jedes $r = 0, 1, \ldots$ *auch*

$$[\bigcap_{p=0}^{r} \mathfrak{E}_p; \sum_{p=0}^{r} \varphi_p] \in \mathsf{W}.$$

Satz 4.3. Φ *sei linear und für ein gewisses* $[\mathfrak{E}; \varphi] \in \mathsf{W}$ $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$*-fehlkonvergenzfrei. Dann ist für jedes* $[\mathfrak{G}; \psi] \in \mathsf{Z}$ *der Raum* $\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}$ *mit der F-Norm* $\psi(\Phi \mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{x})$ *ein F-Raum aus* W.

Satz 4.4. *Sei* $\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \in \mathsf{W}$, $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{E}$. *Aus* $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{F}]$ *folgt dann* $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}]$.

Satz 4.5. *Sei* $[\mathfrak{E}; \varphi] \in \mathsf{W}$ *und* $[\mathfrak{E}; \psi] \in \mathsf{W}$. *Dann haben* $[\mathfrak{E}; \varphi]$ *und* $[\mathfrak{E}; \psi]$ *denselben Konvergenzbegriff.*

Satz 4.6. *Ist* $\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \in \mathsf{W}$, $\mathfrak{F} < \mathfrak{E}$, *so bildet* $\mathfrak{F}$ *eine magere Menge in* $[\mathfrak{E}]$.

Satz 4.7. *Gilt* $\mathfrak{E}_p \in \mathsf{W}$ *und* $\mathfrak{E}_p \neq \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathfrak{E}_r$ $(p = 0, 1, \ldots)$, *so gehört* $\bigcup \mathfrak{E}_p$ *nicht zu* W.

Beweise. 4.2: Vgl. [12], Satz 4.7.

4.3: Es genügt, die Vollständigkeit von $[\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}; \psi(\Phi \mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{x})]$ zu beweisen. Sei $\mathfrak{x}_n$ in $[\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}]$ konzentriert; dann ist $\mathfrak{x}_n$ in $[\mathfrak{E}]$ und $\Phi(\mathfrak{x}_n)$ in $[\mathfrak{G}]$ konzentriert, somit gibt es ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ und ein $\mathfrak{y} \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}]$ bzw. $\Phi(\mathfrak{x}_n) \to \mathfrak{y}\,[\mathfrak{G}]$ ($\backsim$ Vollständigkeit der F-Räume). Weiter gilt $\Phi(\mathfrak{x}_n) \to \mathfrak{y}\,[\mathfrak{Z}]$ ($\backsim$ 4.1). Φ ist $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$-fehlkonvergenzfrei, somit ist $\mathfrak{y} = \Phi \mathfrak{x}$. Offenbar gilt nun $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}]$.

4.4: Die durch $I(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$ definierte lineare Operation I (Identität) ist $\mathfrak{F}\mathfrak{E}$-fehlkonvergenzfrei ($\backsim$ 4.1), somit $\mathfrak{F}\mathfrak{E}$-stetig ($\backsim$ 3.5).

4.5: Folgt aus 4.4.

4.6: Folgt wie 4.4, diesmal unter Anwendung von 3.4.

4.7: Die Annahme $\bigcup \mathfrak{E}_p \in \mathsf{W}$ wird mittels 3.3 und 4.6 zum Widerspruch geführt.

Auf dem folgenden einfachen Satz beruht der Beweis des Hauptergebnisses:

Satz 4.8. Φ *sei eine lineare Operation aus* $\mathfrak{W}$ *in* $\mathfrak{Z}$. *a) Dann gelten folgende logische Beziehungen für Eigenschaften von* Φ: $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}$*-fehlkonvergenzfrei* $\rightsquigarrow$ $\mathsf{W}\mathfrak{Z}$*-fehlkonvergenzfrei* $\rightsquigarrow$ $\mathsf{W}\mathsf{Z}$*-fehlkonvergenzfrei* $\rightsquigarrow$ $\mathsf{W}\mathsf{Z}$*-stetig, sowie:* $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}$*-stetig* $\rightsquigarrow$ $\mathsf{W}\mathfrak{Z}$*-stetig* $\rightsquigarrow$ $\mathsf{W}\mathsf{Z}$*-stetig. b) Ferner ist* Φ $\mathsf{W}\mathsf{Z}$*-stetig, wenn* $\Phi^U \mathfrak{Z} = \mathfrak{E} \in \mathsf{W}$ *und* Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$*-fehlkonvergenzfrei ist.*

Beweis. a) folgt mit 4.1 und 3.5. b) Φ bilde ein $\mathfrak{F} \in \mathsf{W}$ in ein $\mathfrak{G} \in \mathsf{Z}$ ab. Dann ist $\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{E}$, somit ist Φ $\mathfrak{F}\mathfrak{Z}$-fehlkonvergenzfrei ($\rightsquigarrow$ 4.4), also $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$-fehlkonvergenzfrei ($\rightsquigarrow$ 4.1), also $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$-stetig ($\rightsquigarrow$ 3.5).

Im nächsten Abschnitt betrachten wir zwei spezielle Funktionenräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ sowie die erzeugten F-Systeme M und P.

§ 5.

Die F-Systeme M und P.

Alle im folgenden vorkommenden Funktionen sind komplexwertig.

Die Menge der Funktionen $\mathfrak{x} = x(t)$, die in $0 \leqq t < \infty$ erklärt, endlich und meßbar sind, bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$. Dabei heißen zwei Funktionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gleich, wenn $x(t) = y(t)$ für alle t gilt.

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen $\mathfrak{x} = x(t)$, die in $0 \leqq t < \infty$ fast überall erklärt und endlich sowie meßbar sind. Dabei sollen zwei Funktionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{M}$ gleich heißen, wenn $x(t) = y(t)$ für fast alle t gilt. Anders ausgedrückt, sind die Elemente von $\mathfrak{M}$ Klassen „äquivalenter" Funktionen aus $\mathfrak{P}$.

Mit den Funktionen $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{M}$ nehmen wir i. a. nur solche Operationen vor, die invariant sind gegen Abänderung von $x(t)$ auf einer Nullmenge. Wir verwenden daher in $\mathfrak{M}$ statt fin, lim usw. die in bekannter Weise definierten Ausdrücke $\operatorname{fin}^* x(t)$, $\lim^* x(t)$ usw. Jedem $\mathfrak{X} \leqq \mathfrak{P}$ ordnen wir die Menge $\mathfrak{Y} \leqq \mathfrak{M}$ der Funktionsklassen zu, die einen Repräsentanten in $\mathfrak{X}$ besitzen.

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ sind lineare Räume bei „natürlicher" Erklärung der Verknüpfungen $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$.

Mit $m_{\varepsilon,T}(\mathfrak{x})$ bezeichnen wir das Lebesguesche Maß der Menge der t mit $|x(t)| \geqq \varepsilon$, $0 \leqq t \leqq T$. Wir nennen eine Funktionenfolge $\mathfrak{x}_n$ maßkonvergent gegen $\mathfrak{x}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $0 \leqq T < \infty$ die Zahlen $m_{\varepsilon,T}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x})$ eine Nullfolge bilden.

Nun definieren wir in $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ einen Konvergenzbegriff:

$\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\ [\mathfrak{P}] \rightsquigarrow x_n(t) \to x(t)$ *für alle* t (*„punktweise Konvergenz"*).

$\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\ [\mathfrak{M}] \rightsquigarrow x_n(t)$ *ist maßkonvergent gegen* $x(t)$.

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ (versehen mit diesen Konvergenzbegriffen und der oben genannten linearen Struktur) erzeugen zwei F-Systeme M und P.

Die Menge $\mathfrak{O}$ der fast überall verschwindenden $x(t) \in \mathfrak{P}$ bildet in $[\mathfrak{P}]$ einen abgeschlossenen linearen Unterraum. Dasselbe gilt für $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{O}$ in $[\mathfrak{E}]$, wo $\mathfrak{E}$ irgendein Raum aus P ist. Wir haben daher

Satz 5.1. *Ist* $[\mathfrak{E}; \varphi] \in \mathsf{P}$, *so gehört der zugeordnete Raum* $\overline{\mathfrak{E}}$ (*vgl. o.*) *zu* M *mit der F-Norm* $\overline{\varphi}(\overline{\mathfrak{x}}) = \operatorname{fin} \varphi(\mathfrak{x})$, *wo* $\mathfrak{x}$ *alle in* $\mathfrak{E}$ *liegenden Repräsentanten von* $\overline{\mathfrak{x}}$ *durchläuft.*

Der Beweis verläuft genau wie bei Hille [8], S. 472, Th. 22.11.4.

Wir betrachten zwei Arten von Funktionstransformationen. $\gamma(s)$ und $\Gamma(s, t)$ seien in $0 \leqq s < \infty$ bzw. $0 \leqq s, t < \infty$ erklärt, endlich und meßbar. Mit γ bzw. Γ bezeichnen wir dann die Transformationen

$$y(s) = \gamma(s)\, x(s) \quad \text{bzw.} \quad y(s) = \int_0^{\to\infty} \Gamma(s, t)\, x(t)\, dt.$$

In anderer Schreibweise lautet (*) nun $\mathfrak{y} = \gamma\mathfrak{x} + \Gamma\mathfrak{x}$.

(*) kann aufgefaßt werden als Operation aus $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}$, aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{P}$, aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$, aus $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{M}$. Je nachdem ob $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{M}$ als Bildraum auftritt, ist die Abbildung erklärt, wenn $y(s)$ für alle bzw. fast alle s existiert ($y(s)$ ist dann nach 6.8 meßbar). Im Falle „aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{P}$" ist $\gamma(s) \equiv 0$ anzunehmen, da sonst die Abbildung mehrdeutig wäre. Es wird jeweils aus dem Zusammenhang ersichtlich sein, als was für eine Operation (*) aufgefaßt wird.

Ein erster Schritt in Richtung auf das Hauptergebnis ist

Satz 5.2. *Die Operation γ ist $\mathfrak{PP}$-, $\mathfrak{PM}$-, $\mathfrak{MM}$-stetig, also auch* PP-, PM-, MM-*stetig.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus bekannten Tatsachen über punktweise bzw. Maßkonvergenz, der zweite anschließend mit 4.8.

§ 6.

Beispiel für Räume aus M und P.

Beispiel 6.1. *Zu* P *gehört der Raum $\mathfrak{C}$ der beschränkten Funktionen $\mathfrak{x} = x(t)$, für die $\lim_{t \to \infty} x(t)$ existiert. F-Norm:*

$$\overline{\operatorname{fin}}_{0 \leqq t < \infty} |x(t)|.$$

Die folgenden Beispiele sind Räume aus M:

Beispiel 6.2. *Der Raum $\mathfrak{M}$ mit der F-Norm*

$$\mu(\mathfrak{x}) = \int_0^{\infty} 2^{-t} \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|}\, dt.$$

μ definiert in $\mathfrak{M}$ wieder den in § 5 genannten Konvergenzbegriff („Maßkonvergenz").

Beispiel 6.3. *Der Raum $\mathfrak{L}_T$ der in $0, T$ (T fest) L^1-integrierbaren $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$. F-Norm:* $\mu(\mathfrak{x}) + \int_0^T |x(t)|\, dt$.

Beispiel 6.4. *Der Raum $\mathfrak{L}$ der in jedem endlichen Teilintervall L^1-integrierbaren $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$. F-Norm:*

$$\lambda(\mathfrak{x}) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{\varkappa_p}{1 + \varkappa_p}; \quad \varkappa_p(\mathfrak{x}) = \int_0^p |x(t)|\, dt.$$

Beispiel 6.5. *Der Raum* $\mathfrak{K}$ *der* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{L}$, *für die* $\int_0^{\to\infty} x(t)\,dt$ *existiert. F-Norm:*

$$\varkappa(\mathfrak{x}) = \lambda(\mathfrak{x}) + \varkappa_0(\mathfrak{x}); \quad \varkappa_0(\mathfrak{x}) = \overline{\underset{0 \leqq T < \infty}{\text{fin}}} \left| \int_0^T x(t)\,dt \right|.$$

Beispiel 6.6. *Der Raum* $\gamma^U \mathfrak{K}$ *der* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$, *für die bei gegebenem* γ *das Integral* $\int_0^{\to\infty} \gamma(t)\,x(t)\,dt$ *existiert (die also von* γ *in* $\mathfrak{K}$ *abgebildet werden). F-Norm*

$$\varkappa(\gamma\,\mathfrak{x}) + \mu(\mathfrak{x}).$$

Beispiel 6.7. *Der Raum* $\Gamma^U \mathfrak{M}$ *der Funktionen* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$, *für die bei gegebenem* Γ *fast überall* $\int_0^{\to\infty} \Gamma(s,t)\,x(t)\,dt$ *existiert. F-Norm:*

$$\mu(\mathfrak{x}) + \mu(\varkappa(\gamma_s\,\mathfrak{x})).$$

$\mu(\varkappa(\gamma_s\,\mathfrak{x}))$ ist dabei so zu verstehen: Für jedes s wird von der Funktion $\gamma_s\,\mathfrak{x} = \Gamma(s,t)\,x(t)$ (mit Argument t) die F-Norm $\varkappa$ gebildet, sodann von der entstandenen Funktion (mit Argument s) der Ausdruck μ. Die Berechtigung der Bezeichnung $\Gamma^U \mathfrak{M}$ ergibt sich aus 6.8 und 7.3.

Beweise: 6.1, 6.2, 6.3. Die geforderten Eigenschaften ergeben sich leicht aus bekannten Sätzen der Analysis.

6.4. Anwendung von 6.3, 4.2 und 3.1.

6.5. Anwendung von 4.3 mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}$ und $\Phi\mathfrak{x} = \int_0^s x(t)\,dt$.

6.6. Anwendung von 4.3 mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}$ unter Beachtung von 5.2.

6.7. Hier benötigen wir einen Hilfssatz:

Hilfssatz 6.8. *$\Lambda(s,t)$ sei (flächenhaft) meßbar. Ist* $f(s) = \int_0^T \Lambda(s,t)\,dt$ *(T fest) für fast alle s erklärt (und endlich), so ist* $f(s) \in \mathfrak{M}$. *Entsprechende Behauptungen gelten für* $g(s) = \overline{\underset{0 \leqq T < \infty}{\text{fin}}} \left| \int_0^T \Lambda(s,t)\,dt \right|$ *und* $h(s) = \int_0^{\to\infty} \Lambda(s,t)\,dt$.

Beweis[1]). Wir setzen für $n = 0, 1, \ldots$

$$\Lambda_n(s,t) = \begin{cases} \frac{\Lambda(s,t)}{|\Lambda(s,t)|} \cdot n & \text{für} \quad |\Lambda| > n \\ \Lambda(s,t) & \text{für} \quad |\Lambda| \leqq n. \end{cases}$$

$f_n(s) = \int_0^T \Lambda_n(s,t)\,dt$ ist meßbar (↷ Hobson, [9], S. 629). $f_n(s)$ konvergiert für fast alle s gegen $f(s)$, also ist $f(s)$ meßbar (↷ [9], S. 584).

[1]) Verf. verdankt Herrn W. Jurkat eine den Beweis betreffende Anregung.

$\int_0^T A(s,t)\,dt$ ist eine in T stetige Funktion, daher ist

$$g(s) = \operatorname{fin} \int_0^{T_n} A(s,t)\,dt\,,$$

wo T_n alle rationalen Zahlen durchläuft. Nach dem vorigen ist für jedes T_n die Funktion $\int_0^{T_n} A(s,t)\,dt$ meßbar, somit auch $g(s)$ ($\backsim$ [9], S. 584).

Ähnlich verläuft der Beweis für $h(s)$.

Wir kommen zum Beweis von 6.7. $\Gamma^U\mathfrak{M}$ ist ein linearer Unterraum in $\mathfrak{M}$. $\mu(\mathfrak{x}) + \mu(\varkappa(\gamma_s\mathfrak{x}))$ ist eine F-Norm: Dazu muß zunächst gezeigt werden, daß $\varkappa(s) = \varkappa(\gamma_s\mathfrak{x})$ eine Funktion aus $\mathfrak{M}$ ist. Dies ist der Fall, wenn die Funktionen $\varkappa_n(s) = \varkappa_n(\gamma_s\mathfrak{x})$ zu $\mathfrak{M}$ gehören ($\backsim$ [9]; S. 564 und 584). Letzteres ergibt sich aber aus 6.8 (man setze $A(s,t) = \Gamma(s,t)\,x(t)$ bzw. $A(s,t) = |\Gamma(s,t)\,x(t)|$). Daher ist der Ausdruck $\mu(\varkappa(\gamma_s\mathfrak{x}))$ für jedes $\mathfrak{x} \in \Gamma^U\mathfrak{M}$ erklärt. Nun gelten folgende Beziehungen:

$$w(t) \leqq z(t) \text{ f. ü. } \backsim \mu(\mathfrak{w}) \leqq \mu(\mathfrak{z}),$$
$$z_n(t) \to 0 \text{ f. ü. } \backsim \mu(\mathfrak{z}_n) \to 0.$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften bestätigt man, daß $\mu(\mathfrak{x}) + \mu(\varkappa(\gamma_s\mathfrak{x}))$ eine F-Norm ist.

$[\Gamma^U\mathfrak{M}]$ ist vollständig: Sei $\sum \mu(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_{n+1}) < \infty$, $\sum \mu(\varkappa(\gamma_s(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_{n+1}))) < \infty$ (vgl. 3.2). Dann ist für fast alle s $\sum \varkappa(\gamma_s(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_{n+1})) < \infty$. Somit ist die Folge $\mathfrak{x}_n$ in fast allen Räumen $\gamma_s^U\mathfrak{R}$ konzentriert, hat daher in diesen Räumen Grenzelemente $\mathfrak{x}^{(s)}$ (vgl. 6.6). Alle $\mathfrak{x}^{(s)}$ sind gleich ($\backsim$ 4.1), etwa $= \mathfrak{x}$. Offenbar gilt dann $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}$ $[\Gamma^U\mathfrak{M}]$. Daß der F-Raum $[\Gamma^U\mathfrak{M}]$ zu **M** gehört, ist nun klar.

Damit ist der Beweis vollendet. Wir können $\Gamma^U\mathfrak{M}$ auch auffassen als „Fast-überall-Durchschnitt" der überabzählbar vielen Räume $\gamma_s^U\mathfrak{R}$. In 6.7 steckt schon der Kern des Hauptergebnisses.

§ 7.

Das Hauptergebnis.

Satz 7.1. *Die Transformation*

$$(*) \qquad y(s) = \gamma(s)\,x(s) + \int_0^{+\infty} \Gamma(s,t)\,x(t)\,dt$$

ist **PB**-, **MB**-, **MM**-, **PM**-*stetig und* **PP**-, **MP**-, **MM**-, **PM**-*stetig.*

Anders formuliert, lautet der zweite Teil des Satzes: Bildet die Transformation (*) einen Raum aus **M** oder **P** in einen ebensolchen ab, so ist diese Abbildung stetig.

Beweis. Es genügt wegen 4.8, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Wegen 5.2 dürfen wir $\gamma(s) \equiv 0$ annehmen, also die Operation Γ betrachten.

1. Fall ($\mathsf{P}\mathfrak{P}$). Γ sei in $\mathfrak{E} \in \mathsf{P}$ erklärt. Dann sind die Funktionale $f_s(\mathfrak{x}) = \int_0^{\to\infty} \Gamma(s,t)\, x(t)\, dt$ nach 7.2 stetig. Also ist Γ $\mathfrak{E}\mathfrak{P}$-stetig.

2. Fall ($\mathsf{M}\mathfrak{P}$). Der Beweis verläuft wie im ersten Fall.

3. Fall ($\mathsf{M}\mathfrak{M}$). Ist Γ in $\mathfrak{E} \in \mathsf{M}$ erklärt, so ist $\mathfrak{E} \leqq \Gamma^U \mathfrak{M}$. Γ bildet $\Gamma^U \mathfrak{M}$ stetig in $\mathfrak{M}$ ab ($\rightsquigarrow$ 7.3), also ist Γ erst recht $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$-stetig ($\rightsquigarrow$ 4.4).

4. Fall ($\mathsf{P}\mathfrak{M}$). Γ sei in $\mathfrak{E} \in \mathsf{P}$ erklärt. Dann ist Γ, aufgefaßt als Operation aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$, auch in dem zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Raum $\overline{\mathfrak{E}} \in \mathsf{M}$ erklärt. Γ bildet $\overline{\mathfrak{E}}$ stetig in $\mathfrak{M}$ ab, also ist Γ erst recht $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$-stetig (man vgl. die F-Normen von $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ in 5.1).

Zusätze zu 7.1 finden sich in § 8 (8.6) und in § 11.

Wir tragen die beim Beweis verwendeten Sätze 7.2 und 7.3 nach:

Satz 7.2. *Ein Funktional der Form* $f(\mathfrak{x}) = \int_0^{\to\infty} \gamma(t)\, x(t)\, dt$ *ist* M- *und* P-*stetig.*

Beweis. f ist genau dann in einem Raum $\mathfrak{E} \in \mathsf{M}$ oder $\mathfrak{E} \in \mathsf{P}$ erklärt, wenn γ $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$ abbildet; nach 5.2 ist diese Abbildung stetig. Das Funktional $g(\mathfrak{y}) = \int_0^{\to\infty} y(t)\, dt$ ist in $\mathfrak{K}$ stetig, woraus die Behauptung folgt.

Satz 7.3. *Γ bildet den Raum $\Gamma^U \mathfrak{M}$ stetig in $\mathfrak{M}$ ab.*

Beweis. $y(s) = \int_0^{\to\infty} \Gamma(s,t)\, x(t)\, dt$ $(\mathfrak{x} \in \Gamma^U \mathfrak{M})$ ist meßbar ($\rightsquigarrow$ 6.8). Es ist $|y(s)| \leqq \varkappa_0(\gamma_s \mathfrak{x}) \leqq \varkappa(\gamma_s \mathfrak{x})$ für fast alle s, somit $\mu(\mathfrak{y}) \leqq \mu(\mathfrak{x}) + \mu(\varkappa(\gamma_s \mathfrak{x}))$, woraus sich die Stetigkeit ergibt.

§ 8.

F_σ-Räume.

Sei $\mathfrak{W}$ ein linearer Raum. Die $\mathfrak{E}_p$ seien F-Räume, die lineare Unterräume in $\mathfrak{W}$ bilden. Es gelte $\mathfrak{E}_p \leqq \mathfrak{E}_{p+1}$ $(p = 0, 1, \ldots)$ und

Eigenschaft 8.1. *Aus* $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}_p]$, $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{y}\,[\mathfrak{E}_q]$ folgt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$.

Im linearen Raum $\mathfrak{E} = \mathsf{U}\mathfrak{E}_p$ definieren wir einen Konvergenzbegriff: $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}] \rightsquigarrow \mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}_p]$ *für mindestens ein* p.

Versehen mit diesem Konvergenzbegriff heißt $\mathfrak{E}$ ein *F_σ-Raum*. Die $\mathfrak{E}_p$ nennen wir eine *Definitionsfolge* von $\mathfrak{E}$ und schreiben $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\}$. Offenbar kann $\mathfrak{E}$ mittels verschiedener Definitionsfolgen bestimmt werden. Die $\mathfrak{E}_p$ gehören alle zu dem von dem F_σ-Raum $\mathfrak{E}$ erzeugten F-System E. Ein F-Raum $\mathfrak{F}$ ist ein F_σ-Raum $\mathfrak{F} \sim \{\mathfrak{F}_p\}$ mit $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}$ $(p = 0, 1, \ldots)$.

8.1 ist erfüllt, wenn $\mathfrak{W}$ einen Konvergenzbegriff hat und die $\mathfrak{E}_p$ zum F-System W gehören. Die Menge der aus W hergeleiteten F_σ-Räume heißt das F_σ-System W_σ. W_σ enthält mehr Räume als W ($\backsim$ 4.7).

Wir bringen einige Sätze über F_σ-Räume, wobei u. a. 3.5 und 4.3 verallgemeinert werden. In 8.2 und 8.3 bedeuten $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\}$ und $\mathfrak{G} \sim \{\mathfrak{G}_p\}$ F_σ-Räume, Φ eine Operation von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$.

Satz 8.2. *Ist Φ linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-fehlkonvergenzfrei, so sogar $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-stetig.*

Satz 8.3. *Ist Φ linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-stetig, so bildet Φ jedes $\mathfrak{E}_p$ in ein $\mathfrak{G}_{r_p}$ ab. Bildet Φ zudem $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{G}$ ab, so ist für geeignete p_r $(r = 0, 1, \ldots)$ $\Phi \mathfrak{E}_{p_r} \geqq \mathfrak{G}_r$.*

Beweise. In beiden Sätzen ist nach Voraussetzung Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-fehlkonvergenzfrei, also (für bel. p, r) $\mathfrak{E}_p \mathfrak{G}_r$-fehlkonvergenzfrei. Somit ist $\Phi^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p \in \mathsf{E}$ ($\backsim$ 4.3). Es ist $\mathfrak{E}_p = \bigcup_{r=0}^{\infty} (\Phi^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p)$, also $\mathfrak{E}_p = \Phi^U \mathfrak{G}_{r_p} \cap \mathfrak{E}_p$ für geeignetes r_p ($\backsim$ 3.3, 4.6). Φ bildet $\mathfrak{E}_p$ fehlkonvergenzfrei, also stetig in $\mathfrak{G}_{r_p}$ ab ($\backsim$ 3.5). Damit ist 8.2 und der erste Teil von 8.3 bewiesen. Bildet Φ zudem $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{G}$ ab, so gilt $\mathfrak{G}_r = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Phi(\Phi^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p)$ $= \bigcup_{p=0}^{\infty} (\mathfrak{G}_r \cap \Phi \mathfrak{E}_p)$, also für geeignetes p_r $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_r \cap \Phi \mathfrak{E}_{p_r}$ ($\backsim$ 3.3, 3.4), somit $\mathfrak{G}_r \leqq \Phi \mathfrak{E}_{p_r}$.

Nun seien $\mathsf{W}, \mathsf{W}_\sigma, \mathsf{Z}, \mathsf{Z}_\sigma$ die von zwei Räumen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{Z}$ erzeugten Systeme, Φ eine Operation aus $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{Z}$.

Satz 8.4. *Ist Φ linear und für ein gewisses $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\} \in \mathsf{W}_\sigma$ $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$-fehlkonvergenzfrei, so ist für jedes $\mathfrak{G} \sim \{\mathfrak{G}_p\} \in \mathsf{Z}_\sigma$ der Raum $\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}$ ein F_σ-Raum aus W_σ mit der Definitionsfolge $\Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p$.*

Beweis. Wie oben folgt $\Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p \in \mathsf{W}$. Es ist

$$\Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p \leqq \Phi^U \mathfrak{G}_{p+1} \cap \mathfrak{E}_{p+1} \quad \text{und} \quad \Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E} = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p .$$

Satz 8.5. *Ist Φ linear und $\mathsf{W}\mathfrak{Z}$-fehlkonvergenzfrei, so auch $\mathsf{W}_\sigma \mathsf{Z}_\sigma$-stetig.*

Beweis. Sei $\mathfrak{E} \in \mathsf{W}_\sigma$, $\mathfrak{G} \in \mathsf{Z}_\sigma$, Φ bilde $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ ab. Φ ist $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$-, also auch $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-fehlkonvergenzfrei, somit $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-stetig ($\backsim$ 8.2).

Damit ergibt sich unmittelbar als Zusatz zu 7.1

Satz 8.6. *Die Operation (*) ist $\mathsf{P}_\sigma \mathsf{P}_{\sigma^-}$, $\mathsf{M}_\sigma \mathsf{P}_{\sigma^-}$, $\mathsf{M}_\sigma \mathsf{M}_{\sigma^-}$, $\mathsf{P}_\sigma \mathsf{M}_{\sigma^-}$-stetig.*

Besonders wichtig ist Satz 8.2. Mit 8.2 lassen sich 4.4 und 4.5 auf F_σ-Räume verallgemeinern. Weiter folgt aus 8.2: Ist Φ eine lineare Operation von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$-stetig und eindeutig umkehrbar, so ist die Umkehroperation Φ^{-1} „$\mathfrak{G}\mathfrak{E}$-stetig"; u. a.

§ 9.

Abbildungen mit Folgen von Operationen.

$\mathfrak{W}, \mathfrak{Z}, \mathsf{W}, \mathsf{Z}, \mathsf{W}_\sigma, \mathsf{Z}_\sigma$ seien wieder definiert wie in § 8, die Φ_q $(q = 0, 1, \ldots)$ Operationen aus $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{X} \leqq \mathfrak{W}$, $\mathfrak{Y} \leqq \mathfrak{Z}$. Wir sagen: „Die Folge Φ_q bildet $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ ab", wenn es zu jedem $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ ein q gibt, so daß $\Phi_q \mathfrak{x} \in \mathfrak{Y}$ ist.

Satz 9.1. Voraussetzung: *Die Φ_q seien lineare Operationen aus $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{Z}$, seien $\mathsf{W}\mathfrak{Z}$-fehlkonvergenzfrei und mit folgender „Magerkeitseigenschaft" versehen: Für jedes $\mathfrak{F} \in \mathsf{W}$ ist entweder $\mathfrak{F} \leqq \Phi_q^U \mathfrak{Z}$ oder $\Phi_q^U \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{F}$ mager in $[\mathfrak{F}]$. Schließlich möge die Folge Φ_q den Raum $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\} \in \mathsf{W}_\sigma$ in ein $\mathfrak{G} \sim \{\mathfrak{G}_p\} \in \mathsf{Z}_\sigma$ abbilden.*

Behauptung. *Es gibt zu jedem $p = 0, 1, \ldots$ ein $q = q(p)$ und ein $r = r(p)$, so daß Φ_q den Raum $\mathfrak{E}_p$ in $\mathfrak{G}_r$ abbildet, und zwar stetig.*

Beweis. Sei $\Phi_q^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p = \mathfrak{F}_{pqr}$. Ist Φ_q nicht in ganz $\mathfrak{E}_p$ erklärt, so ist $\mathfrak{F}_{pqr}$ mager in $[\mathfrak{E}_p]$. Ist Φ_q in $\mathfrak{E}_p$ erklärt, so ist $\mathfrak{F}_{pqr} \in \mathsf{W}$ ($\backsim$ 4.3), also entweder mager in $[\mathfrak{E}_p]$ oder $= \mathfrak{E}_p$ ($\backsim$ 4.6). Es ist $\mathfrak{E}_p = \bigcup_{q,\, r=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{pqr}$. Daher gibt es ein $q = q(p)$ und ein $r = r(p)$, so daß $\mathfrak{E}_p = \mathfrak{F}_{pqr}$ ist ($\backsim$ 3.3). Φ_q bildet $\mathfrak{E}_p$ in $\mathfrak{G}_r$ ab, und zwar stetig ($\backsim$ 3.5).

Die Φ_q erfüllen die Magerkeitsbedingung, wenn jedes $\Phi_q^U \mathfrak{Z}$ ein Raum aus W oder W_σ ist ($\backsim$ 4.6, 3.3).

§ 10.

Ein Permanenzsatz.

Wir benötigen einige neue Räume und Definitionen:

Beispiel 10.1. *Der Raum $\mathfrak{B}$ der beschränkten Funktionen $x(t) \in \mathfrak{P}$ gehört zu P mit der F-Norm*

$$\operatorname*{fin}_{0 \leqq t < \infty} |x(t)|.$$

Beispiel 10.2. *Der Raum $\mathfrak{J}$ der $\mathfrak{x} \in \mathfrak{L}$, für die $\lim\limits_{t \to \infty}{}^{*} x(t)$ existiert, gehört zu M_σ mit der Definitionsfolge $\mathfrak{J}_p$ (s. u.).*

Beispiel 10.3. *Für jedes $p = 0, 1, \ldots$ gehört der Raum $\mathfrak{J}_p$ der $\mathfrak{x} \in \mathfrak{J}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}{}^{*}_{t \geqq p} |x(t)| < \infty$ zu M mit der F-Norm*

$$v_p(\mathfrak{x}) = \int_0^p |x(t)|\, dt + \overline{\operatorname*{fin}}{}^{*}_{t \geqq p} |x(t)|.$$

Wir unterdrücken die einfachen Beweise für 10.1—10.3.

Unter einer *Treppenfunktion* verstehen wir eine Funktion der Form

$$x(t) = a_n \,(b_n \leqq t < b_{n+1};\ n = 0, 1, \ldots, r;\ b_0 = 0,\ b_{r+1} = \infty).$$

Die Menge dieser Funktionen nennen wir $\mathfrak{T}$.

$\mathfrak{A}_T$ bedeute die Menge der Funktionen $x(t) \in \mathfrak{P}$ mit

$$x(t) = 0 \quad (t \geqq T).$$

Wir setzen $\mathfrak{A} = \bigcup_{T \geqq 0} \mathfrak{A}_T$ (Menge der *abbrechenden Funktionen*).

Mit $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}_T$, $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir auch die zugehörigen Untermengen von $\mathfrak{M}$.

Sei $\mathfrak{W}$ ein Raum mit einem Konvergenzbegriff, $\mathfrak{X} \leqq \mathfrak{W}$. Ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{W}$ heißt *Berührpunkt* von $\mathfrak{X}$ in $[\mathfrak{W}]$, wenn es Elemente $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{X}$ gibt mit $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{X}]$. Die Menge der Berührpunkte bezeichnen wir hier und im folgenden durch Überstreichen ($\overline{\mathfrak{X}}$). $\mathfrak{X}$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{X}}$ ist. Es gilt folgender einfache Satz:

Satz 10. 4. *$\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{Z}$ seien Räume mit Konvergenzbegriffen, $\mathfrak{X} \leqq \mathfrak{W}$, $\mathfrak{Y} \leqq \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y}$ abgeschlossen in $[\mathfrak{Z}]$, Φ eine $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}$-stetige Operation. Dann ist $\Phi\overline{\mathfrak{X}} \leqq \overline{\Phi\mathfrak{X}}$, und im Falle $\Phi\mathfrak{X} \leqq \mathfrak{Y}$ auch $\Phi\overline{\mathfrak{X}} \leqq \mathfrak{Y}$.*

Beweis. Klar.

Wir betrachten nun eine Integraltransformation Γ und die aus ihr hergeleiteten Transformationen Γ_q $(q = 0, 1, \ldots)$ mit

$$\Gamma_q(s,t) = \begin{cases} \Gamma(s,t) & (s \geqq q) \\ 0 & (s < q). \end{cases}$$

Satz 10. 5. *Sei* $y(s) = \int_0^{\to\infty} \Gamma(s,t)\, x(t)\, dt$. a) *Genau dann existiert für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{J}$ der Grenzwert* $\lim_{s\to\infty} y(s)$ *(wobei $y(s)$ für $s \geqq s(\mathfrak{x})$ erklärt ist), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(Zn) $\qquad \int_0^{\infty} |\Gamma(s,t)|\, dt \leqq M_0 \quad$ *für* $\quad s \geqq q_0$;

(Zn′) $\qquad \overline{\operatorname{fin}}^{*}_{0 \leqq t \leqq p} |\Gamma(s,t)| \leqq M_p \quad$ *für* $\quad s \geqq q_p \qquad (p = 1, 2, \ldots)$;

(Zs) $\qquad \lim_{s\to\infty} \int_0^{\infty} \Gamma(s,t)\, dt = a$ *existiert;*

(Sp) $\qquad \lim_{s\to\infty} \int_0^{T} \Gamma(s,t)\, dt = a_T$ *existiert für* $0 \leqq T < \infty$.

b) *Genau dann ist überdies* $\lim y(s) = \lim^{*} x(t)$, *wenn die aufgeführten Bedingungen erfüllt sind und* $a = 1$, $a_T = 0$ $(0 \leqq T < \infty)$ *gilt.*

Die Bedingungen Zn und Zn′ sind dabei so zu verstehen: Es gibt ein q_p und ein M_p (das nicht von s abhängt), so daß die betreffenden Ungleichungen erfüllt sind. Wir dürfen dabei q_p als ganz annehmen. Sp kann noch abgeschwächt werden: Man ersetzt „$0 \leqq T < \infty$“ durch „für alle T einer in $0, \infty$ dichten Menge“.

Beweis. a) Γ hat genau dann die gewünschten Eigenschaften, wenn die Operationenfolge Γ_q den Raum $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{C}$ abbildet.

Die Bedingungen sind notwendig: Die Γ_q, aufgefaßt als Operationen aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{P}$, erfüllen die Voraussetzungen von 9. 1 ($\sim$ 7. 1, 6. 7). Also wird jedes $\mathfrak{J}_p$ von einem Γ_{q_p} in $\mathfrak{C}$ abgebildet, und zwar linear und stetig. Für die Γ_{q_p}-Transformierte y_p gilt dann

$$\overline{\operatorname{fin}}_{0 \leqq s < \infty} |y_p(s)| \leqq M_p \cdot v_p(\mathfrak{x}),$$

weil v_p eine homogene F-Norm ist (vgl. Banach [3], S. 54, Th. 1). Hieraus folgen unter Anwendung bekannter Sätze der Analysis die Bedingungen Zn und Zn′; Zs und Sp sind trivialerweise notwendig.

Die Bedingungen sind hinreichend: Aus Zn und Zn′ folgt, daß Γ_{q_p} $\mathfrak{J}_p$ stetig in $\mathfrak{B}$ abbildet. $\mathfrak{C}$ ist eine abgeschlossene Menge in $[\mathfrak{B}]$, Γ_{q_p} bildet jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}$ ab ($\rightsquigarrow$ Sp), somit ist $\Gamma_{q_p}(\overline{\mathfrak{T} \cap \mathfrak{A}}) \leq \mathfrak{C}$ ($\rightsquigarrow$ 10.4). Zu $\overline{\mathfrak{T} \cap \mathfrak{A}}$ gehört jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_p \cap \mathfrak{L}$ (vgl. etwa Banach [3], S. 62). Durch Betrachtung aller $\mathfrak{J}_p$ erhält man hieraus, daß für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}$ $\lim_{s \to \infty} y(s)$ existiert. Somit ist $\Gamma_{q_p}(\mathfrak{J}_p \cap \mathfrak{A}) \leq \mathfrak{C}$. $\overline{\mathfrak{J}_p \cap \mathfrak{A}}$ enthält jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{J}_p$ mit $\lim_{t \to \infty}{}^{*} x(t) = 0$; jedes solche $\mathfrak{x}$ wird also von Γ_{q_p} in $\mathfrak{C}$ abgebildet ($\rightsquigarrow$ 10.4). Anwendung von Zs ergibt nun die Behauptung. ($\overline{\mathfrak{T} \cap \mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{J}_p \cap \mathfrak{A}}$ bedeuten jeweils die Menge der Berührpunkte bezüglich des Konvergenzbegriffes in $[\mathfrak{J}_p]$).

b) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. Ganz ähnlich wie oben beweist man, daß sie auch hinreichend sind.

Der Beweis für den hinreichenden Teil des Satzes ist vom Typ der bekannten „Grundmengenbeweise". Erschwert wird die Durchführung dadurch, daß wir Operationenfolgen verwenden und daß in $[\mathfrak{J}]$ nicht allgemein gilt $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}$.

Wir verzichten auf die Formulierung naheliegender Varianten von 10.5, die „nulltreue" Transformationen usw. betreffen.

§ 11.

Schlußbemerkungen.

Satz 7.1 (und 8.6) kann in vielfacher Weise variiert werden durch Verwendung anderer Intervalle und Integralbegriffe; u. a. bleibt 7.1 richtig, wenn in (*) $\int_0^{\to\infty}$ durch $\int_0^{\infty}$ ersetzt wird. Weiter kann 7.1 verallgemeinert werden auf Funktionen mehrerer Veränderlicher; je nach dem verwendeten Integralbegriff treten dabei neue Schwierigkeiten auf. Analoga zu 8.6 für Mehrfachintegrale sind besonders wichtig, da viele geläufige Räume von Funktionen mehrerer Veränderlicher in natürlicher Weise als F_σ-Räume aufgefaßt werden können. Selbstverständlich sind in 7.1 und 8.6 entsprechende Sätze für Matrixtransformationen von Zahlenfolgen enthalten (vgl. [12], Satz 4.4).

Die Voraussetzungen über Meßbarkeit sind z. T., insbesondere bei Betrachtung des Raumes $\mathfrak{P}$ allein, entbehrlich.

Will man ähnlich wie in [12] vernünftige Aussagen über lineare, stetige Funktionale in den benutzten Funktionenräumen erhalten, so muß man sich auf lokalkonvexe F-Räume beschränken. Man betrachtet dann etwa das von $\mathfrak{L}$ erzeugte F-System lokalkonvexer F-Räume und läßt nur solche Transformationen (*) zu, die $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}$ abbilden.

Die gestreiften Fragen sollen in einer späteren Arbeit ausführlicher behandelt werden.

Banach [2] (siehe [3], S. 87) bewies ebenfalls einen Satz über die Stetigkeit der Transformation (*) (mit $\gamma(s) \equiv 0$). Er setzt voraus, daß die vorkommenden Funktionenräume Banach-Räume sind und drei Bedingungen genügen (1., 2., 3.), während von Γ Meßbarkeit nicht gefordert wird. 1. besagt dabei, daß der Raum zu **M** oder **P** gehört. 3. kann weggelassen werden: Man verwendet am Schluß des Beweises statt Th. 2, S. 79, einfach Th. 7, S. 41.

Vereinigungen von abzählbar vielen F-Räumen wurden auch behandelt von Köthe [10] [11] und Dieudonné-Schwartz [6] unter Einführung einer Topologie im Sinne von Bourbaki [4]. Diese Autoren beschränken sich auf lokalkonvexe Räume; in [6] wird weiter vorausgesetzt, daß $\mathfrak{E}_p$ eine abgeschlossene Menge in $[\mathfrak{E}_{p+1}]$ bildet. Auch bei F_σ-Räumen in unserem Sinn läßt sich eine derartige Topologie einführen; für die vorliegenden Zwecke erschien jedoch die Verwendung eines Konvergenzbegriffes einfacher.

Satz 10.5 findet sich in leicht abgeänderter Form ohne Beweis bei Hardy [7], S. 62. Für weitere Sätze dieser Art vgl. man [1] und [5].

Literaturverzeichnis.

Agnew, R. P.

[1] Properties of generalized definitions of limit. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 689—730 (1939).

Banach, S.

[2] Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math. III, 133—181 (1922), insbes. S. 163 ff.

Banach, S.

[3] Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932.

Bourbaki, N.

[4] Topologie générale. Paris, 1940—1949.

Day, M. M.

[5] Regularity of function-to-function transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 296—303 (1939).

Dieudonné, J. und Schwartz, L.

[6] La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Institut Fourier 1, 61—101 (1950).

Hardy, G. H.

[7] Divergent series. Oxford 1949.

Hille, E.

[8] Functional analysis and semi-groups. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31.) New York 1948.

HOBSON, E. W.

[9] The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. I. 3. ed. Cambridge 1927.

KÖTHE, G.

[10] Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume. Math. Zeitschrift 52, 627—630 (1950).

[11] Über zwei Sätze von BANACH. Math. Zeitschrift 53, 203—209 (1950).

ZELLER, K.

[12] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Zeitschrift 53, 463—487 (1951).

(Eingegangen am 24. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 2, S. 183—186 (1952).

Integrability of trigonometric series. II.

By

R. P. Boas Jr. in Evanston, Illinois (USA).

There are many conditions which, when imposed on the coefficients of a formal trigonometric series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{1}$$

make it a FOURIER series. A very general criterion was given by CESARI [1]. Here we obtain some sufficient conditions for (1) to be an L^p FOURIER series, $p \geqq 1$; they are somewhat analogous to known results (cf. [3, chap. VI], [2]) for convergence of power sums of the FOURIER coefficients of functions satisfying LIPSCHITZ conditions.

Theorem 1. *If* $1 < q \leqq 2$, $q' = q/(q-1)$, $1 \leqq p < q'$, *and* $\alpha < 1 - q/p'$, *then* (1) *is the* FOURIER *series of a function of* L^p *if* $c_n \to 0$ *and*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^q = O(m^\alpha) \tag{2}$$

as $m \to \infty$ *through the multiples of some fixed integer. If* $\alpha \geqq 1 - q/p'$ *the conclusion no longer holds.*

Corollary. *If* (2) *holds with some* q, $1 < q \leqq 2$, *and with* $\alpha < 1$, *then* (1) *is a* FOURIER *series.*

Theorem 2. *If* $1 < q \leqq 2$, $\beta < 1$, $r \geqq q$ *and* $r > 1 + \beta$, *then if* $c_n \to 0$ *and*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^r = O(m^\beta) \tag{3}$$

and in addition $\{c_n\}$ *is a sequence of bounded variation, i. e.*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+1} - c_n| < \infty, \tag{4}$$

then (1) *is the* FOURIER *series of a function of* L^p *for*

$$1 \leqq p < \frac{(r-1)q}{r-1+(q-1)\beta}. \tag{5}$$

If $r = q$, Theorem 2 is weaker than Theorem 1 since it requires $\beta < q/p - 1 < 1 - q/p'$. The relationship of the two theorems is clearer if we write (2) and (3) in the form

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^r\right\}^{1/r} = O(m^\delta),$$

and for simplicity take $p = 1$. We see then that Theorem 1 requires $\delta < 1/r$ while Theorem 2 requires only $\delta < 1/r'$, so that for large r the sum on the left is smaller and at the same time the exponent on the right is allowed to be larger.

Theorem 2 is a consequence of Theorem 1, as we may see as follows. We have from (4), with some constant A,

$$\sum |c_{n+1} - c_n| < A,$$
$$\sum |c_{n+1} - c_{n-1}| \leqq \sum |c_{n+1} - c_n| + \sum |c_n - c_{n-1}| < 2A,$$

etc., and finally

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}| < 2mA.$$

Hence, by HÖLDER's inequality with index $1/\lambda$, where $\lambda = (r-q)/(r-1) \leqq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^q &= \sum |c_{n+m} - c_{n-m}|^{\lambda} |c_{n+m} - c_{n-m}|^{q-\lambda} \\ &\leqq \{\sum |c_{n+m} - c_{n-m}|\}^{\lambda} \{\sum |c_{n+m} - c_{n-m}|^{(q-\lambda)/(1-\lambda)}\}^{1-\lambda} \\ &\leqq (2A)^{\lambda} m^{\lambda+\beta(1-\lambda)},\end{aligned}$$

since $(q-\lambda)/(1-\lambda) = r$. By Theorem 1, (1) is an L^p FOURIER series if $\lambda + \beta(1-\lambda) < 1 - q/p'$, i. e. if $p < (r-1)q/\{r - 1 + (q-1)\beta\}$. The condition $r > 1 + \beta$ is required to make the interval (5) nonempty.

We now prove Theorem 1. If (2) is satisfied for $m = k$, the quantities $c_{n+k} - c_{n-k}$ are the FOURIER coefficients of a function $\varphi_k(t)$ of $L^{q'}$ (by the HAUSDORFF-YOUNG theorem):

$$c_{n+k} - c_{n-k} = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi_k(t)\, dt.$$

The function $\varphi(t) = \varphi_k(t)/\sin kt$ belongs to $L^{q'}$ except perhaps in neighborhoods of the points $0, \pm\pi/k, \pm 2\pi/k, \ldots, \pm\pi$. We have to show that $\varphi(t)$ actually belongs to L^p and has c_n as its FOURIER coefficients. Now if m is a multiple of k, $\varphi(t)\sin mt$ is integrable, and direct calculation shows that

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t) \sin mt\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi_k(t) \{\sin mt/\sin kt\}\, dt \\ &= 2\pi(c_{n+m} - c_{n-m}).\end{aligned}$$

Thus

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) \sin mt|^{q'}\, dt \leqq A \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^q\right\}^{q'/q},$$

again by the HAUSDORFF-YOUNG theorem, where A is independent of m, and so by (2) and the inequality $\sin t \geqq 2t/\pi$ for $0 \leqq t \leqq \pi/2$ we have

$$\int_{s\pi/k}^{s\pi/k+1/m} |\varphi(t)|^{q'} t^{q'}\, dt \leqq A m^{(\alpha-q)/(q-1)}, \quad s = 0, \pm 1, \ldots, \pm k. \tag{6}$$

with a new A (independent of m). The case $s = 0$ of (6) is typical. Since $|\varphi(t) \sin kt|^{q'}$ is integrable, so is $t^p |\varphi(t)|^p$, $1 \leqq p \leqq q'$; let

$$F(t) = \int_0^t x^p |\varphi(x)|^p \, dx.$$

Now

$$(7) \qquad \int_{1/m}^{\varepsilon} |\varphi(t)|^p \, dt = \int_{1/m}^{\varepsilon} x^{-p} \, dF(x)$$

$$= F(\varepsilon)\varepsilon^{-p} - F(1/m)\, m^p + p \int_{1/m}^{\varepsilon} F(x)\, x^{-p-1} \, dx, \quad \varepsilon < \pi/k.$$

By HÖLDER's inequality with index q'/p we have, using (6),

$$F(1/m) \leqq \left\{ \int_0^{1/m} x^{q'} |\varphi(x)|^{q'} \, dx \right\}^{p/q'} m^{-(q'-p)/q'} \leqq A\, m^{(\alpha p - p - q)/q} = o(m^{-p}),$$

since $\alpha p < p + q - q\,p$.

Furthermore, $F(t)$ is a nondecreasing function of t, and if $m = rk$ (r an integer) and $1/((r+1)k) \leqq t \leqq 1/(rk)$, we have $F(t) \leqq A\, t^u$, $u > p$, where A is another constant, and so $F(x)\, x^{p-1}$ is dominated by the integrable function x^{u-p-1} in a neighborhood of 0. Thus the right side of (7) approaches a limit and hence so does the left side, i. e. $|\varphi(t)|^p$ in integrable at 0. The same proof applies to the other values of s in (6) and the first part of Theorem 1 follows.

To prove the negative part of Theorem 1, we consider the series (1) with $c_n = n^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1/q$, for $n > 0$, and $c_{-n} = c_n$. Then [3, p. 116] $f(x)$ is of order $x^{\gamma-1}$ as $x \to 0$ and consequently belongs to L^p for $p < 1/(1-\gamma)$ but not for $p \geqq 1/(1-\gamma)$. Now the sum on the left of (2) is

$$\sum_{n \neq m} \left| \frac{1}{(n+m)^\gamma} - \frac{1}{|n-m|^\gamma} \right|^q = 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+m)^\gamma} - \frac{1}{(n-m)^\gamma} \right|^q$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{m-1} \left| \frac{1}{(n+m)^\gamma} - \frac{1}{(m-n)^\gamma} \right|^q$$

$$= 2\, S_1 + 2\, S_2.$$

Using the inequality

$$a^\gamma - b^\gamma \leqq \frac{a^2 - b^2}{a^{2-\gamma} + b^{2-\gamma}},$$

where $0 < b < a$, $0 < \gamma \leqq 1$, we have

$$\frac{1}{|n-m|^\gamma} - \frac{1}{(n+m)^\gamma} = \frac{(n+m)^\gamma - |n-m|^\gamma}{|n^2 - m^2|^\gamma} \leqq \frac{(n+m)^2 - (n-m)^2}{|n^2 - m^2|^\gamma \{(n+m)^{2-\gamma} + |n-m|^{2-\gamma}\}}$$

$$\leqq \frac{4\,n\,m}{(n+m)^2 |n-m|^\gamma}.$$

Hence

$$S_1 \leqq 4\, m^q \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n^q}{(n+m)^{2q}\,(n-m)^{\gamma q}}$$

$$\leqq 4 \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{(n-m)^{\gamma q}} + 4\, m^q \sum_{n=2m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-m)^{q+\gamma q}} = O(m^{1-\gamma q}).$$

Similarly

$$S_2 \leqq 4\, m^q \sum_{n=1}^{m-1} \frac{n^q}{(n+m)^{2q}\,(m-n)^{\gamma q}}$$

$$\leqq 2^{2-\gamma q}\, m^{-\gamma q} \sum_{n<m/2} 1 + 4 \sum_{k \leqq m/2} k^{\gamma q} = O(m^{1-\gamma q}).$$

Now let $1 < q \leqq 2$, $1 < p < q'$, so that $0 < 1/p' < 1/q$. If then $\gamma = 1/p'$ we have $\gamma q < 1$ and so $f(x)$ satisfies (2) with any $\alpha \geqq 1 - \gamma q = 1 - q/p'$ but does not belongs to L^p. If $p = 1$, we can proceed similarly with

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n x}{\log n},$$

which does not belong to L but satisfies (2) with any $q > 1$ and $\alpha = 1$.

Theorem 1 can be generalized by replacing (2) by an order condition on

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k}\, h_{mk} \Big|^q,$$

where h_k are the FOURIER coefficients of a suitable auxiliary function $g(x)$, which is $\sin x$ in Theorem 1. For example, if $g(x) = \sin^2(x/2)$, (2) becomes

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} + c_{n-m} - 2\, c_n|^q = O(m^\alpha),$$

with the same conditions on the parameters as in Theorem 1.

Literature.

CESARI, L.

[1] Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier, Bollettino della Unione Matematica Italiana (1) 13, 100—104 (1934).

HILLE, E. and TAMARKIN, J. D.

[2] On the summability of Fourier series. III, Mathematische Annalen 108, 525—577 (1933).

ZYGMUND, A.

[3] Trigonometrical Series, Warszawa-Lwów, 1935.

(Eingegangen am 13. August 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 2, S. 187—198 (1952).

Kapazität von Strahlungsfeldern.

Von

Hermann Weyl in Zürich.

Diese Arbeit behandelt in breiterer Ausführung, welche die Beweise nicht unterschlägt, denselben Gegenstand wie eine jüngst von mir in den Proceedings der National Academy of Sciences der USA. veröffentlichte Note über skalare Strahlungsfelder (vol. **37**, Dezember 1951). Den Anstoß dazu gaben zwei bisher nur in vorläufiger Form vom Antenna Laboratory der University of California bekannt gegebene Mitteilungen (Nr. 175 und 176 der Serie 7, 1950/51) von Herrn W. K. SAUNDERS, die sich vor allem mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld befassen. Darauf ließe sich meine Theorie, bei richtigem Ansatz der „Belegungs-Potentiale", leicht ausdehnen[1]), wie denn überhaupt im n-dimensionalen EUKLIDischen Raum das skalare Feld durch eine lineare Differentialform beliebigen Ranges ersetzt werden könnte. Mir ist es genug, das Prinzip am skalaren Fall (Rang 0) zu erläutern.

Bezeichnungen. Ein dreidimensionaler EUKLIDischer Raum mit den CARTESIschen Koordinaten x_1, x_2, x_3 liegt zugrunde. Der vom beliebigen Punkte p' zum Punkte p führende Vektor mit den Komponenten $x_i - x_i'$ werde mit $\mathfrak{r}(p\,p')$, seine Länge, die Distanz der beiden Punkte, mit $r = r(p\,p')$ bezeichnet. Σ_R ist die Kugel vom Radius R um den Ursprung $O = (0, 0, 0)$. Runde Klammern finden für das skalare Produkt zweier Vektoren Verwendung. Die Bezeichnungen grad und div werden aus der Vektoranalysis übernommen. $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ ist der LAPLACEsche Operator $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Da wir im Gebiet komplexer Zahlen operieren, tritt die imaginäre Einheit i auf.

Es wird angenommen, daß der Raum in zwei komplementäre Teile, das „Innere" V und daß „Äußere" W, geteilt ist. V wird als beschränkt,

---

[1]) Erst nach dem Druck der Proceedings-Note (und nach Abschluß des Manuskripts dieser Arbeit) ist mir die jüngst veröffentlichte Arbeit von CLAUS MÜLLER „Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern" (Math. Annalen **123**, 1951, S. 345—378) zugänglich geworden. Er verwendet, für den Fall der vollkommenen Reflexion, einen ähnlichen Kunstgriff wie Herr SAUNDERS: Modifikation der Fläche Ω. Ich glaube, daß der hier entwickelte Kapazitäts-Begriff die natürliche Lösung der Schwierigkeit liefert, welche aus der Existenz von Eigenfunktionen des Schwingungsproblems für den Innenraum entsteht.

W als zusammenhängend vorausgesetzt. Ihre gemeinsame Grenze Ω möge aus einer oder mehreren getrennt verlaufenden geschlossenen glatten Flächen bestehen. Glatt bedeutet, daß der Einheitsvektor $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(s)$ der äußeren Normalen im variablen Punkt s von Ω nicht nur eine stetige Funktion von s ist, sondern auch einer HÖLDER-Bedingung genügt. Die normale Ableitung eines skalaren Feldes $u(p)$ wird mit $\partial u/\partial n = (\text{grad}\, u, \mathfrak{n})$, ihr Wert im Punkte s von Ω zuweilen der Deutlichkeit halber mit $\partial u/\partial n_s$ oder gar (vielleicht nicht sehr glücklich) mit $\partial u(s)/\partial n_s$ bezeichnet. Bei Integration über den Raum mit Bezug auf den variablen Raumpunkt p bedeutet dp das Volumelement, bei Integration über einen variablen Flächenpunkt s ist ds das Oberflächenelement.

Das Randwertproblem und der Eindeutigkeitssatz. k sei eine gegebene positive Konstante. Wir betrachten skalare (komplex-wertige) Felder $u(p)$, welche der Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

genügen. Für ein derartiges Feld, das außerhalb einer genügend großen Kugel Σ_{R_0} definiert ist, gilt das folgende

Lemma von RELLICH. *u verschwindet identisch, vorausgesetzt, daß*

$$\int_{\Sigma_R} |u|^2\, ds \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty$$

gleichmäßig in allen Richtungen.

Nur solche Lösungen von (1) gelten als zulässig, welche der Ausstrahlungsbedingung

$$R(\partial u/\partial n + i k u)_{\text{auf } \Sigma_R} \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty$$

gleichmäßig in allen Richtungen genügen. Die auf einen festen „Aufpunkt" p' sich beziehende Funktion

$$Q(pp') = Q(r) = e^{-ikr}/2\pi r \qquad [r = r(pp')]$$

von p ist eine solche Lösung (Grundlösung), die einer punktförmigen Quelle in p' entspricht. Die Aufgabe ist, eine zulässige Lösung in W zu bestimmen, die am Rande von W, d. i. auf Ω, vorgegebene Randwerte $\gamma(s)$ annimmt. Vor der Existenz- stellt sich die Eindeutigkeitsfrage. Sie wurde von W. MAGNUS und F. RELLICH auf Grund des oben erwähnten Lemmas im Jahre 1943 bejahend beantwortet, indem sie zeigten, daß $\gamma(s) = 0$ auf Ω die Gleichung $u(p) = 0$ in W impliziert [2]).

---

[2]) Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung **53**, S. 57—65. — Der RELLICHsche Beweis liefert, genau genommen, die Gleichung $u = 0$ nur im Außenraum einer ganz V einschließenden Kugel Σ_{F_0} um O, nicht schon in ganz W. Um sie auf ganz W auszudehnen, muß man sich des Prozesses der analytischen Fortsetzung bedienen, und hier kommt die Voraussetzung zur Geltung, daß W zusammenhängend ist. Sei σ eine samt ihrer Oberfläche ganz innerhalb W liegende

Zurückführung auf eine Fredholmsche Integralgleichung. Man kann den Gradienten von $Q(pp')$ sowohl mit Bezug auf p als p' bilden, und es ist

$$\operatorname{grad}_p Q(p\,p') = \frac{d\,Q}{d\,r}\,\frac{\mathfrak{r}(pp')}{r(pp')} = -\operatorname{grad}_{p'} Q(p\,p').$$

So ist klar, was mit

$$\partial\, Q(p\,s')/\partial\, n_{s'} = (\operatorname{grad}_{s'} Q(p\,s'),\ \mathfrak{n}(s'))$$

für irgend einen Raumpunkt p und einen Punkt s' auf Ω gemeint ist.

In Analogie zur eigentlichen Potentialtheorie, die mit dem Fall $k = 0$ zu tun hat, bilden wir mit Hilfe einer beliebigen stetigen Funktion $\mu(s)$ auf Ω das „Potential" der Doppelbelegung $\mu(s)$:

$$u(p) = \int_{\Omega} (\partial\, Q(p\,s')/\partial\, n_{s'})\,\mu(s')\,d\,s'. \tag{2}$$

Es genügt sowohl in W wie in V der Gleichung (1). Es erfüllt ferner die Ausstrahlungsbedingung. Seine Randwerte sind

$$\pm\,\mu(s) + \int_{\Omega} K(s, s')\,\mu(s')\,d\,s',$$

wobei das Zeichen + für Annäherung an Ω vom Äußeren W, das Zeichen − für Annäherung vom Inneren V gilt. Auf den Kern

$$K(s, s') = (\operatorname{grad}_{s'} Q(s\,s'),\ \mathfrak{n}(s'))$$

ist die Fredholmsche Theorie anwendbar, da wegen der Glattheit von Ω das Produkt $(\mathfrak{r}(s\,s'),\ \mathfrak{n}(s'))$ für $s = s'$ von höherer als erster Ordnung verschwindet. Integration mit Bezug auf s oder s' erstrecke sich stets auf die ganze Fläche Ω. Das Feld (2) im Äußern wird somit die vorgegebenen stetigen Randwerte $\gamma(s)$ annehmen, falls $\mu(s)$ eine Lösung der Integralgleichung

$$\mu(s) + \int K(s\,s')\,\mu(s')\,d\,s' = \gamma(s) \tag{3}$$

ist. Diese Gleichung besitzt für beliebig vorgegebenes $\gamma(s)$ stets eine (eindeutige) Lösung $\mu(s)$, vorausgesetzt, daß die homogene Gleichung

---

Kugel vom Radius a um den Punkt p_0. Für einen Punkt p' innerhalb σ erhält man in bekannter Weise die Gleichung

$$2\,u(p') = \int_{\sigma} \{(\partial\, Q(s\,p')/\partial\, n_s)\,u(s) - Q(s\,p')\,\partial\, u/\partial\, n_s\}\,d\,s.$$

Daraus ergibt sich eine Entwicklung von $u(p)$ nach Potenzen der relativen Koordinaten $x_i - x_i^0$ von p in bezug auf p_0, die zum mindesten innerhalb der konzentrischen Kugel σ' um p_0 vom Radius $a' = a(\sqrt{2} - 1)$ Gültigkeit besitzt. Darauf fußt die kettenartige analytische Fortsetzung der Gleichung $u(p) = 0$ in alle „Buchten" des „Meeres" W hinein.

mit dem transponierten Kern

$$\eta(s') + \int_{\Omega} \eta(s)\, K(s\,s')\, ds = 0 \tag{4}$$

keine andere Lösung gestattet als die triviale $\eta = 0$. Indem wir die Gleichungen (3) und (4) in der abgekürzten Form

$$(E + K)\,\mu = \gamma, \quad \eta(E + K) = 0$$

schreiben, ahmen wir den Symbolismus des Matrixkalküls so nach, als ob K eine quadratische Matrix wäre und die Werte von μ in einer Spalte, die von η in einer Reihe arrangiert sind. E ist der Operator „Identität".

Aber die Möglichkeit, daß die Gleichung (4) nnd dann auch die Gleichung

$$(E + K)\,\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(s) + \int K(s\,s')\,\varphi(s')\,ds' = 0 \tag{5}$$

nicht-triviale Lösungen η oder φ besitzt, kann natürlich nicht ausgeschlossen werden. Die inhomogene Gleichung (3) ist dann und nur dann lösbar, wenn ihre rechte Seite $\gamma(s)$ zu allen Lösungen η von (4) orthogonal ist,

$$(\eta\,\gamma) = 0, \quad \text{d. i.} \quad \int \eta(s)\,\gamma(s)\,ds = 0;$$

und die Lösung $\mu(s)$ ist in dem Sinne vieldeutig, daß zu ihr eine beliebige Lösung $\varphi(s)$ von (5) addiert werden kann. Nach dem Eindeutigkeitssatz hat das freilich auf das zugehörige Doppelbelegungs-Potential (2) keinen Einfluß. Die Lösungen η von (4) bilden eine lineare Mannigfaltigkeit H von endlichvielen, sagen wir h, Dimensionen; die lineare Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{\Phi}$ der Lösungen φ von (5) besitzt die gleiche Dimensionszahl. Es ist nötig, in Analogie zu dem elektrostatischen Problem der Elektrizitätsverteilung auf vorgegebenen Konduktoren zunächst diese homogenen Gleichungen zu studieren. Man gelangt aber zum Ziel nur, wenn man dabei den Kreis der Eigenfunktionen in der aus der Elementarteilertheorie geläufigen Weise überschreitet. Wir stellen zunächst die einschlägigen Tatsachen der allgemeinen Theorie kurz zusammen.

Die charakteristischen Funktionen eines Kerns. Sei also $K(s\,s')$ ein beliebiger „hinreichend regulärer" Kern. [Es genügt z. B. anzunehmen, daß $K(s\,s')$ gleichmäßig stetig ist, falls man eine beliebig kleine Umgebung $r(s, s') < \varepsilon$ der Diagonale $s = s'$ auf der Mannigfaltigkeit der Punkte (s, s') von $\Omega \times \Omega$ ausnimmt, und daß die (uneigentlichen) Integrale

$$\int_{\Omega} |K(s\,s')|\,ds' \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} |K(s\,s')|\,ds$$

gleichmäßig in s bzw. s' konvergieren. Die Erhard Schmidtsche Methode der Approximation von $K(s\,s')$ durch eine endliche Produktsumme von der Gestalt $\sum f_i(s)\, g_i(s')$ macht es möglich, den insbesondere für

singuläre Kerne so schwerfälligen FREDHOLMschen Determinanten-Formalismus ganz zu umgehen.] Für den Operator $E + K$ werde die Abkürzung A verwendet. Man bilde die endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathsf{H}_0, \mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots$ der Lösungen η der sukzessiven Gleichungen

$$\eta = 0 \mid \quad \eta A = 0 \mid \quad \eta A^2 = 0 \mid \ldots .$$

Offenbar ist $\mathsf{H}_0 \subset \mathsf{H}_1 \subset \mathsf{H}_2 \subset \cdots$. Diese Sequenz wird stabil nach einer gewissen Anzahl l von Schritten; d. h. es ist $\mathsf{H}_l = \mathsf{H}_{l+1} = \cdots$, während H_{l-1} noch ein echter Teil von H_l ist. Die Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{\Phi}_m$ der Lösungen φ von $A^m \varphi = 0$ hat dieselbe Dimensionszahl h_m wie H_m ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Die aus einem willkürlichen Element η von H_l und φ von $\boldsymbol{\Phi}_l$ gebildete Bilinearform

$$(\eta \varphi) = \int \eta_l(s)\, \varphi(s)\, d\, s$$

ist nicht-ausgeartet; d. h. $\varphi = 0$ ist das einzige Element φ von $\boldsymbol{\Phi}_l$, das der Gleichung $(\eta \varphi) = 0$ für alle $\eta \in \mathsf{H}_l$ genügt[3]). Wir verwenden die Bezeichnungen $\mathsf{H}, \boldsymbol{\Phi}, h$ für $\mathsf{H}_1, \boldsymbol{\Phi}_1, h_1$ und setzen $h_l = n$. Die Elemente φ von $\boldsymbol{\Phi}_1$ sind die Eigenfunktionen des Kernes K (sc. zum Eigenwert -1); die Elemente von $\boldsymbol{\Phi}_l$ tragen in der Literatur verschiedene Namen, sie mögen hier charakteristische Funktionen heißen.

Unter Verwendung der Abkürzungen $\varphi' = A\varphi$, $\eta' = \eta A$ gilt die einfache Regel

$$(\eta' \varphi) = (\eta \varphi') ; \tag{6}$$

denn beide Ausdrücke sind gleich $\eta A \varphi$. Die Elemente von der Form φ' ($\varphi \in \boldsymbol{\Phi}_l$) bilden eine Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{\Phi}_l'$ von $n - h$ Dimensionen. In der Tat, ergänzt man die Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ von $\boldsymbol{\Phi}$ durch Hinzufügung weiterer Elemente $\varphi_{h+1}, \ldots, \varphi_n$ zu einer Basis von $\boldsymbol{\Phi}_l$, so ist offenbar $\varphi'_{h+1}, \ldots, \varphi'_n$ eine Basis von $\boldsymbol{\Phi}_l'$. Durch h Elemente $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_h^*$, welche linear unabhängig mod $\boldsymbol{\Phi}_l'$ sind, kann man diese ihrerseits zu einer vollen Basis von $\boldsymbol{\Phi}_l$ ergänzen. Es sei ferner $\eta_1, \ldots, \eta_h$ eine Basis von H. Ich behaupte, daß die Matrix

$$d_{ij} = (\eta_i \varphi_j^*) \qquad (i, j = 1, \ldots, h)$$

nicht-ausgeartet ist, d. h. $\det d_{ij} \neq 0$. Dies folgert man entweder aus der Tatsache, daß die Bilinearform $(\eta \varphi)$ für $\eta \in \mathsf{H}_l$, $\varphi \in \boldsymbol{\Phi}_l$ nicht-ausgeartet ist, oder man zeigt direkt, daß eine lineare Kombination $\varphi = \sum_{j=1}^{h} a_j \varphi_j^*$, welche den Gleichungen $(\eta_i \varphi) = 0$ für $i = 1, \ldots, h$ genügt, Null sein muß. In der Tat ergibt sich aus diesen Bedingungen nach dem Fundamentalsatz über die Lösung von Integralgleichungen die Existenz einer Funktion ψ, für die $A\psi = \varphi$ gilt. Da somit $A^{l+1}\psi = 0$

[3]) Hier ist ein rascher Beweis: Nach dem Hauptsatz über Integralgleichungen hat die Gleichung $A^l \psi = \varphi$ eine Lösung ψ, falls φ orthogonal zu allen $\eta \in \mathsf{H}_l$ ist. Liegt φ in $\boldsymbol{\Phi}_l$, so ψ in $\boldsymbol{\Phi}_{2l}$. Es ist aber $\boldsymbol{\Phi}_{2l} = \boldsymbol{\Phi}_l$, somit $\psi \in \boldsymbol{\Phi}_l$, $A^l \psi = \varphi = 0$.

ist, liegt ψ in $\Phi_{l+1} = \Phi_l$ und darum φ in Φ_l'. Das hat aber, da $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_h^*$ linear unabhängig mod Φ_l' sind, die Gleichungen $a_1 = \cdots = a_h = 0$ zur Folge.

Die Abbildung M. Wir kehren nunmehr zu unserm speziellen Kern K zurück. Neben (2) betrachten wir das Potential einer einfachen Belegung $\nu(s)$,

$$v(p) = \int Q(ps)\,\nu(s)\,ds. \tag{7}$$

Hier ist $\nu(s)$ eine beliebige stetige Funktion auf Ω; und wie immer erstreckt sich die Integration über ganz Ω. Die Funktion $v(p)$ genügt sowohl in V als in W der Gleichung $\Delta v + k^2 v = 0$, sie erfüllt die Ausstrahlungsbedingung, und sie geht stetig über Ω hinüber. Hingegen erleidet die normale Ableitung $\partial v/\partial n$ auf Ω den Sprung $2\nu(s)$, indem dieselbe auf der Außen- und Innen-Seite im Punkte s' von Ω bzw. die Werte

$$\mp \nu(s') + \int \nu(s)\,K(s\,s')\,ds, \qquad \text{kürzer} \quad \nu(\mp E + K)$$

annimmt.

Man bilde das Potential (7) insbesondere für den Fall, daß $\nu(s)$ eine charakteristische Funktion η des transponierten Kernes ist:

$$v(p) = \int Q(p\,s')\,\eta(s')\,ds', \tag{8}$$

und bezeichne seine Randwerte mit

$$\varphi(s) = \int Q(s\,s')\,\eta(s')\,ds'. \tag{9}$$

Ich behaupte:

Satz 1. *Die Gleichung* (9) *definiert eine lineare Abbildung* $\eta \to \varphi = M\eta$ *von* H_l *in* Φ_l.

An Stelle dieses werde sogleich ein schärferer Satz bewiesen, in dem der Angelpunkt unserer ganzen Methode liegt:

Satz 2. *Führt die Abbildung* M *das Element* $\eta \in \mathsf{H}_l$ *in* φ *über, so geht durch dieselbe Abbildung* $\eta' = \eta(E+K)$ *in* $\varphi' = (E+K)\varphi$ *über.*

M verwandelt also auch ηA^m in $A^m\varphi$; und wenn $\eta A^m = 0$ ist, muß $A^m\varphi = 0$ sein. So folgt Satz 1 in der Form, daß M nicht nur H_l in Φ_l verwandelt, sondern auch jede der Teilmannigfaltigkeiten H_m $(m = 1, \ldots, l)$ in das entsprechende Φ_m.

Beweis von Satz 2. Sei p' ein Punkt im Äußern W. Man wende Greens Formel

$$\int_{\Omega} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \int_{V} \{u(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta u + k^2 u)\}\,dp$$

an auf das Innere V und die beiden folgenden daselbst regulären Funktionen von p: $Q(p\,p')$ und (8). Man findet

$$\int (\partial Q(s\,p')/\partial n_s)\,v(s)\,ds = \int Q(s\,p')\,(\partial v/\partial n)(s)\cdot ds.$$

Hier ist mit $\partial v/\partial n$ die normale Ableitung auf der *inneren* Seite von Ω gemeint, welche den Wert $\eta_i(E+K) = \eta A = \eta_i'$ besitzt. Ändert man die Bezeichnungen p', s in p, s' um, so erhält man folgende für alle Punkte $p \in W$ gültige Gleichung

$$\int_\Omega (\partial Q(ps')/\partial n_{s'})\, \varphi(s')\, ds' = \int_\Omega Q(ps')\, \eta_i'(s')\, ds'. \tag{10}$$

Läßt man jetzt den Punkt p von außen in einen Randpunkt s rücken, so geht die linke Seite in $\varphi'(s)$ über, wo $\varphi' = (E+K)\varphi$, während man für die rechte Seite

$$\int Q(ss')\eta_i'(s')\, ds',$$

d. i. das Bild $M\eta_i'$ von η_i', erhält. Darum ist, zugleich mit $\varphi = M\eta_i$, in der Tat

$$\varphi' = M\eta_i'.$$

Satz 3. *Die Abbildung M ist nicht-ausgeartet, d. h. $\eta_i = 0$ ist das einzige Element von H_l, das durch M in $\varphi = 0$ übergeht.*

Daraus folgt sogleich, daß die Abbildung M eineindeutig ist.

Beweis. Für das Potential (8) bedeutet die Gleichung $M\eta_i = 0$, daß seine (inneren und äußeren) Randwerte verschwinden. Nach dem Rellichschen Eindeutigkeitssatz verschwindet darum $v(p)$ im ganzen Außenraum, und darum ist auch die normale Ableitung $(\partial v/\partial n)_a$ auf der Außenseite von Ω gleich Null, $\eta_i(-E+K) = 0$. Infolgedessen gilt

$$\eta_i(E+K) = 2\eta_i \quad \text{oder} \quad \eta_i = \tfrac{1}{2}\eta_i A.$$

Daraus folgt aber

$$\eta_i A = \tfrac{1}{2}\cdot\eta_i A^2, \quad \eta_i = \tfrac{1}{2}\eta_i A = \tfrac{1}{4}\cdot\eta_i A^2,$$

und durch Wiederholung dieses Verfahrens schließlich

$$\eta_i = 2^{-l}\cdot\eta_i A^l = 0,$$

q. e. d.

Wir bilden nun aus irgend zwei Elementen η_i, η_i^* von H_l die Bilinearform

$$C(\eta_i^*, \eta_i) = (\eta_i^*, M\eta_i)$$

und behaupten:

Satz 4. *Die Kapazitätsform $C(\eta_i^*, \eta_i)$ ist symmetrisch und nicht-ausgeartet.*

Beweis. Die Symmetrie ergibt sich ohne weiteres aus dem expliziten Ausdruck

$$C(\eta_i^*, \eta_i) = \int\int \eta_i^*(s)\, Q(ss')\, \eta_i(s')\, ds'\, ds.$$

Die zweite Behauptung, wonach $\eta_i = 0$ das einzige Element von H_l ist, das für alle Elemente η_i^* von H_l die Gleichung $C(\eta_i^*, \eta_i) = 0$ erfüllt, entspringt aus der Kombination der beiden Tatsachen, daß 1) für ein

festes $\eta \in \mathsf{H}_l$ das Element $\varphi = M\eta$ von Φ_l der Gleichung $(\eta^* \varphi) = 0$ für alle $\eta^* \in \mathsf{H}_l$ nur dann genügt, wenn $\varphi = 0$ ist, und daß 2) die Gleichung $M\eta = 0$ die andere $\eta = 0$ impliziert (Satz 3).

Wegen der Symmetrie genügt es, die quadratische Form $C(\eta\,\eta)$ statt der Bilinearform $C(\eta^*, \eta)$ zu betrachten. Mit Bezug auf eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_n$ von H_l läßt sich jedes $\eta \in \mathsf{H}_l$ als eine lineare Kombination

$$\eta(s) = x_1\,\eta_1(s) + \cdots + x_n\,\eta_n(s)$$

der η_i schreiben, und $C(\eta\,\eta)$ geht dann in die nicht-ausgeartete quadratische Form $\sum c_{ij}\,x_i\,x_j$ der Variablen x_i über mit den symmetrischen Koeffizienten

$$c_{ij} = C(\eta_i, \eta_j) \qquad (i, j, = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Diese nennen wir die Kapazitätskoeffizienten. [Im Fall der eigentlichen Potentialtheorie, $k = 0$, ist die Form $C(\eta\,\eta)$ sogar nicht-ausgeartet, wenn wir uns auf die Elemente η von $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1$ beschränken, da sie gleich dem über den ganzen Raum erstreckten Dirichletschen Integral von (8) und darum positiv-definit ist. Dies hat übrigens, wie man sofort sieht, zur Folge, daß $l = 1$ ist[4]). Im Falle der Strahlungstheorie versagt dieser Schluß, da hier an Stelle des Dirichlet-Integrals das Integral über den indefiniten Ausdruck $(\mathrm{grad}\ v)^2 - k^2\,v^2$ tritt; zudem ist v komplex und das Integral von zweifelhafter Konvergenz.]

Sei $\eta_1, \ldots, \eta_h$ eine Basis von $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1$. Wir wählen h Elemente $\eta_1^*, \ldots, \eta_h^*$ von H_l, die linear unabhängig sind mod H_l'; ihre Bilder $\varphi_i^* = M\eta_i^*$ $(i = 1, \ldots, h)$ in Φ_l sind linear unabhängig mod Φ_l', und darum ist die quadratische Matrix der

$$d_{ij} = (\eta_i, \varphi_j^*) = C(\eta_i, \eta_j^*) \qquad (i, j = 1, \ldots, h) \tag{12}$$

nicht-ausgeartet. (Symmetrie kann man für sie natürlich nicht erwarten.) Wir nennen (12) die Kapazitätskoeffizienten im engeren Sinne. Wir werden sogleich noch näher analysieren, in welcher Weise diese „kleine" h-zeilige Kapazitätsmatrix $D = ||d_{ij}||$ in der „großen" n-zeiligen symmetrischen Matrix C der c_{ij} enthalten ist.

Lösung der Randwertaufgabe. Nunmehr sind wir in der Lage, eine zulässige Lösung u der Gleichung (1) im Außenraum W für beliebig vorgegebene stetige Randwerte $\gamma(s)$ auf Ω zu konstruieren. Wir können uns dabei entweder der „großen" oder der „kleinen" Matrix der Kapazitätskoeffizienten bedienen. Im ersten Falle verfährt man so: Aus einer Basis $\eta_1, \ldots, \eta_n$ von H_l bilde man die Basis $\varphi_i = M\eta_i$ von Φ_l. Die Funktion $\varphi_i(s)$ besteht aus den (inneren und äußeren) Randwerten des Potentials

$$v_i(p) = \int G(p\,s')\,\eta_i(s')\,d\,s'.$$

---

[4]) In der Tat zeigt der erwähnte Umstand, daß ein $\eta \in \mathsf{H}$, das zu allen φ in Φ orthogonal ist, notwendig verschwindet. Für ein η in H_2 ist aber η' ein solches Element, darum ist $\eta' = 0$, d. h. η liegt in H_1, oder $\mathsf{H}_2 = \mathsf{H}_1$.

Von der vorgegebenen Randfunktion $\gamma(s)$ subtrahiere man eine solche lineare Kombination der $\varphi_j(s)$, daß die Differenz

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(s)$$

zu allen η_i orthogonal wird. Das ergibt die n Gleichungen

$$(\eta_i \gamma) = \sum_j c_{ij} a_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Diese besitzen eine eindeutige Lösung a_j, da die symmetrische Matrix der Kapazitätskoeffizienten

$$c_{ij} = (\eta_i, \varphi_j) = (\eta_i, M\eta_j) = C(\eta_i, \eta_j)$$

nicht-ausgeartet ist. Für $\gamma^*(s)$ hat die Integralgleichung (3), $(E+K)\mu^* = \gamma^*$ eine Lösung $\mu^*(s)$, und diese führt mittels (2) zu einem Doppelbelegungs-Potential $u^*(p)$ in W mit den Randwerten $\gamma^*(s)$. Indem wir der Mannigfaltigkeit H_l das Element $\eta = \sum_j a_j \eta_j$ entnehmen und zu u^* das der einfachen Belegung $\eta(s)$ entspringende Potential addieren, erhalten wir in

$$u(p) = u^*(p) + \sum_j a_j v_j(p)$$

eine zulässige Lösung in W mit den vorgegebenen Randwerten $\gamma(s)$.

Dies Verfahren ist darum unbefriedigend, weil ja zur Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung (3) gar nicht die Orthogonalität von $\gamma(s)$ zu allen Elementen η von H_l, sondern nur zu allen Elementen η von $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1$ notwendig ist. Darum ziehe ich vor, h Elemente $\eta_1^*, \ldots, \eta_h^*$ von H_l zu wählen, die mod H_l' linear unabhängig sind, und außerdem eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_h$ von $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1$. Dann ist die Matrix (12) nicht-ausgeartet. Ich subtrahiere also von $\gamma(s)$ eine solche lineare Kombination $\sum_j a_j \varphi_j^*$ der h Funktionen $\varphi_j^* = M\eta_j^*$, daß die Differenz γ^* zu den Basiselementen $\eta_1, \ldots, \eta_h$ von H orthogonal wird; das ergibt die in der Tat lösbaren Gleichungen

$$(\eta_i \gamma) = \sum_{j=1}^{h} d_{ij} a_j \qquad (i = 1, \ldots, h).$$

Für γ^* bekommen wir wie vorhin ein μ^* und ein zugehöriges Doppelbelegungs-Potential $u^*(p)$ in W mit den Randwerten $\gamma^*(s)$. Wenn wir

$$\sum_{j=1}^{h} a_j v_j^*(p), \quad v_j^*(p) = \int G(p\,s')\,\eta_j^*(s')\,d\,s',$$

dazu addieren, resultiert eine zulässige Lösung $u(p)$ in W mit den Randwerten $\gamma(s)$.

Die Aufklärung über das Verhältnis der beiden Verfahrensweisen bringt die Gleichung (10). Sie zeigt nämlich, daß das aus einer zu H_l' gehörigen Belegung η' entspringende einfache Potential dem von der

Doppelbelegung $\varphi = M\eta$ erzeugten Potential gleich ist. Das zweite Verfahren sondert aus H_l eine lineare Schar $\sum_j a_j \eta_j^*(s)$ von einfachen Belegungen aus, deren Potentiale sich durchaus nicht in Doppelbelegungs-Potentiale umwandeln lassen und die darum das Minimum dessen darstellen, was man zum allgemeinen Doppelbelegungs-Potential hinzufügen muß, um die Lösung der Randwertaufgabe für beliebiges $\gamma(s)$ zu erzwingen.

Genauere Analyse des Enthaltenseins der kleinen in der großen Kapazitäts-Matrix. Eine Basis („Normalbasis") von H_l kann in folgender Weise konstruiert werden. Man fängt an mit einer Basis $\sigma_0 = \{\eta_{01}, \ldots, \eta_{0r}\}$ von $\mathsf{H}_l \bmod \mathsf{H}_{l-1}$. Die Unabhängigkeit $\bmod \mathsf{H}_{l-1}$ hat zur Folge, daß $\eta_{01}A^{l-1}, \ldots, \eta_{0r}A^{l-1}$ linear unabhängig sind, und darum sind $\sigma_0' = \{\eta_{01}', \ldots, \eta_{0r}'\}$ Elemente in H_{l-1}, die linear unabhängig sind $\bmod \mathsf{H}_{l-2}$, $\sigma_0'' = \{\eta_{01}'', \ldots, \eta_{0r}''\}$ besteht aus Elementen von H_{l-2}, die linear unabhängig sind $\bmod \mathsf{H}_{l-3}$, und so fort bis $\sigma_0^{(l-1)}$. So erhalten wir $r \cdot l$ linear unabhängige Elemente, welche in die Abschnitte $\sigma_0, \sigma_0', \ldots, \sigma_0^{(l-1)}$ je von der Länge $r = r_0$ zerfallen. Darauf ergänzen wir $\eta_{01}', \ldots, \eta_{0r}'$ durch Hinzufügung von r_1 weiteren Elementen $\sigma_1 = \{\eta_{11}, \ldots, \eta_{1r_1}\}$ zu einer vollen Basis von $\mathsf{H}_{l-1} \bmod \mathsf{H}_{l-2}$ und bilden wiederum $\sigma_1, \sigma_1', \ldots, \sigma_1^{(l-2)}$. In dieser Weise fortfahrend lassen wir eine Normalbasis von H_l entstehen, die aus den Abschnitten

$$\sigma_f^{(i)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1-f;\ f = 0, \ldots, l-1)$$

je von der Länge r_f besteht. Die Elemente η von σ_f gehören zu H_{l-f} und genügen darum der Gleichung $\eta^{(l-f)} = 0$. Die Reihe der Indizes, durch die unsere Basiselemente voneinander unterschieden sind, zerfällt in $L = \frac{l(l+1)}{2}$ Sektionen (f, i). Die Basis selbst besteht aus Ketten

$$\eta, \eta', \ldots, \eta^{(l-1-f)}$$

verschiedener Länge $l-f$ $(f = 0, 1, \ldots, l-1)$; das Anfangselement η einer Kette von der Länge $l-f$ gehört zu σ_f.

Bei Wahl dieser Normalbasis steht in der aus den Kapazitätskoeffizienten (11) gebildeten „großen Matrix" C vom Grade n dort, wo sich die Sektion (f, i) des Zeilenindex mit der Sektion (g, j) des Kolonnenindex kreuzt, die rechteckige Matrix $C_{f,g}^{i,j}$ der Elemente

$$C(\eta_f^{(i)}, \eta_g^{*(j)}), \quad \text{wo} \quad \eta_f \in \sigma_f,\ \eta_g^* \in \sigma_g.$$

Nach der Regel (6) und Satz 2 hängt diese Matrix nur von $i+j = \varrho$ ab und werde darum mit $C_{f,g}^{\varrho}$ bezeichnet. Da $\eta_f^{(\varrho)} = 0$ ist, sobald $\varrho \geqq l-f$, und $\eta_g^{*(\varrho)} = 0$, sobald $\varrho \geqq l-g$, verschwindet diese Matrix, wenn $\varrho \geqq l - \max(f, g)$. Sie verschwindet insbesondere, wenn entweder

$$i+j \geqq l-f \quad \text{oder} \quad i+j = l-1-f,\ g > f$$

ist. Nehmen wir für einen Augenblick in der Matrix C diejenige Umstellung der Zeilen vor, welche zustande kommt, wenn man die Num-

mern $i = 0, 1, \ldots, l-1-f$ des Index der Zeilensektionen $(f\,i)$ rückwärts durchläuft,

$$i' = l-1-f-i, \quad \tilde{C}^{i,j}_{f,g} = C^{i',j}_{f,g},$$

so kann man die für das Verschwinden von $C^{i',j}_{f,g}$ hinreichenden Bedingungen

$$i'+j > l-1-f \quad \text{oder} \quad i'+j = l-1-f,\ g > f,$$

in der Form schreiben:

$$j > i \quad \text{oder} \quad j = i,\ g > f. \tag{13}$$

Bei alphabetischer Anordnung der Sektionen $(f\,i)$ nach der Regel, daß $(g\,j)$ auf $(f\,i)$ folgt, wenn (13) besteht, tritt also für die Matrix $\tilde{C}$ Reduktion ein, indem alle Rechtecke von $\tilde{C}$, die auf einer Seite der durch $j = i,\ g = f$ gekennzeichneten Hauptdiagonale stehen, mit Nullen besetzt sind. Darum zerfällt die Determinante von $\tilde{C}$ in die Determinanten der in der Hauptdiagonale von $\tilde{C}$ stehenden Matrizen $\tilde{C}^{i,i}_{f,f} = C^{i',i}_{f,f} = C^{l-1-f}_{f,f}$. Setzen wir $C^{l-1-f}_{f,f} = C_f$, so besteht demnach die Gleichung

$$[C] = \pm |C_0|^l \cdots |C_{l-1}|^1. \tag{14}$$

Sie beruht auf dem Umstand, daß in den L „Hauptfeldern" von C, wo sich (f, i') mit (f, i) kreuzt, die Matrizen C_f stehen, während in einer Hälfte der $L(L-1)$ Nebenfelder Nullen stehen, in solcher Verteilung, daß Reduktion eintritt. Die Regel

$$C^{i,j}_{f,g} = 0 \qquad \text{für } i+j \geqq l-\max(f,g)$$

ergibt, wie man leicht ausrechnet, als Anzahl der leerstehenden Felder in dem Raster von C den Wert

$$N_l^* = \frac{(l-1)\cdot l\cdot(l+1)^2}{6},$$

während

$$N_l = \frac{L(L-1)}{2} = \frac{(l-1)\cdot l\cdot(l+1)\cdot(l+2)}{8}$$

ist. Also tragen noch

$$\frac{(l-2)\cdot(l-1)\cdot l\cdot(l+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

mehr Rechtecke $(f\,i)\times(g\,j)$ die Matrix 0 als für die Reduktion nötig wäre.

Die Endelemente unserer Ketten, d. i.

$$\sigma_f^{(l-1-f)} \qquad (f = 0, 1, \ldots, l-1),$$

bilden zusammen eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_h$ für $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1$, während ihre Anfangselemente, d. i. die σ_f, zusammen eine Basis $\eta_1^*, \ldots, \eta_h^*$ von $\mathsf{H}_l \bmod \mathsf{H}_l'$ ergeben. So zerfällt die Reihe der hier einen Augenblick benutzten Indizes $1, 2, \ldots, h$ in natürlicher Weise in l durch den Index $f = 0,$

$1, \ldots, l-1$ unterschiedene Sektionen von der Länge r_f. Für die kleine Matrix D der

$$d_{ij} = C(\eta_i, \eta_j^*) \qquad (i, j = 1, \ldots, h)$$

ergibt sich ein Raster, daß im Durchschnitt $f \times g$ der Sektion f mit g die Matrix $C_{f,g}^{l-1-f}$ trägt. Diese verschwindet für $g > f$, während längs der Hauptdiagonale die gleichen Matrizen C_f auftreten, die in den Hauptfeldern von C stehen. Somit

$$|D| = |C_0| \cdot |C_1| \cdots |C_{l-1}|. \tag{15}$$

Wenn man will, mag man die Formeln (14), (15) dazu benutzen, um aus $|D| \neq 0$ die Ungleichung $|C| \neq 0$ zu erschließen. Die Analyse zeigt, daß D bereits alle in C wesentlichen Bestandteile C_f enthält; während aber die Matrix C_f in den Hauptfeldern von C $(l-f)$mal vorkommt, tritt sie in D nur einfach auf.

(Eingegangen am 22. November 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 2, S. 199—215 (1952).

Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie.

Von

Ernst-August Behrens in Hamburg.

A und B seien zwei über dem Grundkörper k irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten (alg. Mfn.) im N-dimensionalen Raum S^N. Der Punkt P aus dem Durchschnitt $A \cap B$ von A und B ist eine *Komponente von* $A \cap B$, wenn er isoliert ist, d. h. in keiner in $A \cap B$ liegenden, höherdimensionalen alg. Mf. enthalten ist. P ist *eigentliche Komponente von* $A \cap B$, wenn die Dimensionen r und s von A^r und B^s komplementär sind, also $r+s=N$ ist. Das ist z. B. der Fall für einen Schnittpunkt einer Kurve A^1 mit einer Fläche B^2 im S^3, falls A^1 nicht in B^2 liegt. Ein Schnittpunkt zweier Kurven im S^3 ist nun nach dieser Definition nie eigentliche Komponente. Deshalb hat man den Begriff der eigentlichen Komponente dahin verallgemeinert, daß der in $A \cap B$ isolierte Punkt P eigentliche Komponente von $A \cap B$ bzgl. einer irreduziblen alg. Mf. U^n ist, wenn A^r und B^s in dieser algebraischen Mf. U^n aus S^N eingebettet sind, A^r und B^s komplementäre Dimensionen bzgl. U^n haben ($r+s=n$) und P einfacher Punkt von U ist. Der Tangentialraum T in P an U soll also die Dimension n besitzen. Ein Beispiel dafür bildet der Schnittpunkt P zweier Geraden, die verschiedenen Scharen einer doppelpunktfreien Quadrik U^2 des S^3 angehören. Dagegen ist P nicht eigentliche Komponente des Schnittes zweier Erzeugender eines quadratischen Kegels im S^3 mit der Spitze in P, da jetzt der Kegel U^2 in P einen Doppelpunkt hat.

Für die bzgl. U eigentlichen Schnittkomponenten von A und B gibt es die Multiplizitätstheorie von A. Weil[1]), die auf die Arbeiten von Severi[2]) und van der Waerden[3]) zurückgeht. Auch zur Erfassung der Multiplizität eines isolierten Schnittpunktes P von $A \cap B$, der nicht notwendig eigentliche Komponente von $A \cap B$ ist, gibt es bei

[1]) Weil, A., Foundations of Algebraic Geometry. (Am. Math. Soc. Colloq., vol. 29.) New York 1946. Zitiert mit F. so, daß z. B. F. VI_2, th. 6, bedeutet Theorem 6 aus Kap. VI, § 2.

[2]) Severi, F., Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie. (Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd. 9, S. 335—364. 1933.)

[3]) Waerden, B. L. van der, Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin, Springer 1939.

Severi[2]) einen Ansatz. Er läßt sich ähnlich ausarbeiten, wie es Weil in seinem Buche F. für die eigentlichen Komponenten getan hat, und dies soll in der vorliegenden Abhandlung geschehen.

Die Methode von Weil besteht darin, daß er die Definition der Multiplizität $i(A \cdot B, P; U)$ des Schnittpunktes P von $A^r \cap B^s$ auf U^n im S^N zurückführt auf die Definition der Multiplizität des Schnittpunktes $P \times P$ zweier alg. Mfn. im Produktraum $S^N \times S^N$, dessen Punkte die geordneten Paare von Punkten aus dem S^N sind. Die erste alg. Mf. ist dabei $A^r \times B^s$ und die zweite ein *linearer* Raum Λ mit der zu $A^r \times B^s$ bzgl. $S^N \times S^N$ komplementären Dimension $2N - r - s$. Λ hängt dabei von U^n und P ab. Die Multiplizität von $P \times P$ im Schnitt von $A \times B$ mit dem linearen Raum Λ ist leichter zu erfassen als die von $A \cap B$ im S^N direkt. Einen andern Weg schlägt Chevalley ein[4]).

Den von Severi[2]) gewiesenen Weg zur Definition der Multiplizität eines Schnittpunktes P von $A \cap B$, der nicht notwendig eigentliche Komponente von $A \cap B$ bzgl. einer passenden alg. Mf. U ist, macht man sich am besten wieder durch ein Beispiel im S^3 klar. Von einem allgemeinen Punkte Z des S^3 aus projiziert Severi die Kurve A^1. Der dabei entstehende Kegel ist eine alg. Mf. V^2, deren Dimension zur Dimension der Kurve B^1 bzgl. des S^3 komplementär ist. Wenn P isoliert in $A^1 \cap B^1$ ist, dann auch in $V^2 \cap B^1$, und Severi kann daher die Multiplizität von P in $A^1 \cap B^1$ gleich der bereits definierten Schnittmultiplizität von V^2 und B^1 in P setzen. In dem oben erwähnten Beispiel des Schnittes zweier Erzeugender eines Kegels im S^3 ist V^2 die Ebene durch die eine Erzeugende A^1 und einen allgemeinen Punkt Z des S^3. Von der anderen Erzeugenden B^1 wird V^2 im Doppelpunkt P geschnitten, und natürlich ist die Multiplizität eins.

Im folgenden werde ich eine Definition der Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$ für isolierte Schnittpunkte zweier irreduzibler alg. Mfn. A^r und B^s geben (§ 2), ohne über $r+s$ oder über die Einbettung von A und B in eine alg. Mf. U Voraussetzungen zu benötigen. Ferner wird nicht wie bei Severi[2]) verlangt, daß *alle* Komponenten von $A \cap B$ isolierte Punkte seien. — Ähnlich wie Weil führe ich die Definition von μ zurück auf den einfacher zu behandelnden Schnitt von $A \times B$ mit einer alg. Mf. M im $S^N \times S^N$. Die Dimension von M ist dabei komplementär zur Dimension $r+s$ von $A^r \times B^s$, und für alle Paare von alg. Mfn. A^r und B^s, für die $r+s$ gleich ist, kann man dieselbe Mf. M^{2N-r-s} nehmen. Auf den isolierten Schnittpunkt $P \times P$ von $A \times B$ und M wende ich dann die Multiplizitätsdefinition von Weil an.

Die Mf. M aus $S^N \times S^N$ ist als Mf. einer Korrespondenz im S^N oder durch Abbildung in die Segresche Mf. $S_{N;N}$ sehr einfach beschreibbar (§ 1). Aus den folgenden Ausführungen kann man ohne weiteres den

[4]) Chevalley, C.: Intersection of algebraic and algebroid varietys. (Trans. Amer. Math. Soc., Bd. 57, S. 1—85, 1945.)

Zusammenhang unserer Definition mit dem Kegel V von Severi herauslesen. Ich werde auch zeigen, daß in dem von Weil behandelten Fall (A^r, B^s in U^n, $r+s=n$, P einfacher Punkt von U) unsere Definition $\mu(A\cdot B, P)$ in die Definition der Multiplizität $i(A\cdot B, P; U)$ übergeht (§ 3, Satz 1). — Die Übertragung auf Schnittkomponenten höherer Dimension bereitet keine Schwierigkeiten.

Für μ lassen sich mit einer Ausnahme die für die Multiplizität i von Weil fundamentalen und für i sogar charakteristischen Eigenschaften [1]) beweisen, nämlich die Kommunativität $\mu(A\cdot B, P)=\mu(B\cdot A, P)$ (§ 4, Satz 4), das Kriterium für $\mu=1$ (Satz 5), die Invarianz bei regulärer Projektion (Satz 6) und die Invarianz bei biregulärer, birationaler Korrespondenz (Satz 7). Dagegen gilt nicht mehr durchweg für das Assoziativgesetz, wie durch Gegenbeispiele (§ 5) gezeigt wird, sondern dazu ist die Einbettung von A^r und B^s in eine alg. Mf. U^n, $n=r+s$, die in P einen einfachen Punkt hat, nötig.

Ebenso wie bei Weil ist auch bei uns die Schnittmultiplizität eine lokale Eigenschaft, z. B. brauchen wir über die Isoliertheit von P hinaus nicht etwa vorauszusetzen, daß alle Komponenten von $A\cap B$ die Dimension Null haben. Ferner könnten wir, genau wie Weil, mit dem affinen Raum auskommen. Es ist aber für uns etwas bequemer, im projektiven Raum S^N zu arbeiten, so daß $S^N\times S^N$ ein doppelt projektiver Raum ist. Die Spezialisierung unserer Definition in den von Weil behandelten Fall besteht dann einfach darin, daß wir (im oben erläuterten Sinne Severis [2]) den als allgemeinen Punkt Z im S^3 angenommenen Scheitel des Kegels V^2 zum allgemeinen Punkt der unendlich fernen Ebene spezialisieren.

§ 1.

Die algebraische Mannigfaltigkeit M.

Im projektiven N-dimensionalen Raum S^N über dem Grundkörper k sei L^m ein allgemeiner linearer, m-dimensionaler Unterraum. Mit ihm definieren wir die über k irreduzible Korrespondenz $\mathfrak{K}$ im S^N, zu der ein Paar X, X' von Punkten $X=(x_0,\ldots,x_N)$, $X'=(x'_0,\ldots,x'_N)$ aus S^N gehört, wenn ihre Verbindungsgerade $\overline{XX'}$ den linearen Raum L trifft. Dieser Korrespondenz entspricht im doppelt-projektiven Produktraum $S^N\times S^N$ der geordneten Punktepaare aus S^N eine *alg. Mf. M mit folgendem allgemeinen Punkt*: $(\xi)=(1,\xi_1,\ldots,\xi_N)$ *sei ein allgemeiner Punkt von S^N und* $(\lambda)=(1,\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ *ein allgemeiner Punkt von L^m, τ sei eine Unbestimmte. Dann ist*

$$(\xi;\eta)=(1,\xi_1,\ldots,\xi_N;(1-\tau)\xi_1+\tau\lambda_1,\ldots,(1-\tau)\xi_N+\tau\lambda_N)$$

allgemeiner Punkt von M. Da als Dimensionen über dem Grundkörper k auftreten $\dim_k(\xi)=N$, $\dim_k(\lambda)=m$, ist $\dim_k M=N+m+1$. —

Ein Gleichungssystem für M im $S^N \times S^N$ kann man aus der Forderung

$$\text{(1)} \qquad \text{Rang} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_N \\ x'_0 & x'_1 & \dots & x'_N \\ z_{i0} & z_{i1} & \dots & z_{iN} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mN} \end{pmatrix} \leqq m+2$$

erhalten, wobei die $m+1$ Punkte $Z_i = (z_{i0}, \dots, z_{iN})$, $i = 0, \dots, m$, allgemeine Punkte des S^N sind, also einen allgemeinen linearen Raum L^m aufspannen. Setzen wir die Determinanten aller $(m+3)$-reihigen Teilmatrizen gleich null, so erhalten wir ein System von in X und X' bilinearen Gleichungen für M, die natürlich nicht alle unabhängig sind. —

Bemerkung. Obgleich es im folgenden nicht gebraucht wird, sei noch eine zweite Beschreibung von M angegeben. Dazu bilden wir durch $y_{ik} = x_i \cdot x'_k$, $i, k = 0, \dots, N$, den Produktraum $S^N \times S^N$ ab auf die Segresche Mannigfaltigkeit $S_{N;N}$ im $S^{N(N+2)}$, die dort als Durchschnitt der Quadriken

$$\text{(2)} \qquad y_{ik} \cdot y_{j1} = y_{i1} \cdot y_{jk}, \qquad i \neq j, \; k \neq 1,$$

darstellbar ist. Das Bild M^* von M wird dann gemäß (1) aus $S_{N;N}$ ausgeschnitten durch die sich aus

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} y_{00} & y_{10} & \dots & y_{N0} \\ y_{00} & y_{01} & \dots & y_{0N} \\ z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mN} \end{pmatrix} \leqq m+2$$

ergebenden Hyperflächen, die sich als Hyperebenen erweisen. Entwickeln wir nämlich die $(m+3)$-reihigen Unterdeterminanten dieser Matrix nach den ersten beiden Zeilen, so erhalten wir für die Hyperflächen Gleichungen in den $y_{i0} \cdot y_{0k} - y_{k0} \cdot y_{0i}$, deren Koeffizienten Formen in den z_{rs} sind. Wegen (2) ist $y_{i0} \cdot y_{0k} - y_{k0} \cdot y_{0i} = y_{ik} \cdot y_{00} - y_{ki} \cdot y_{00} = (y_{ik} - y_{ki}) \cdot y_{00}$. Das Bild M^* von M wird also aus der Segreschen Mf. $S_{N;N}$ durch Hyperebenen $\sum_{0 \leq i < k \leq N} a'_{ik}(z)\,(y_{ik} - y_{ki}) = 0$ ausgeschnitten, in denen die $a'_{ik}(z)$ Formen in den Koordinaten der L aufspannenden Punkte $Z_0, \dots, Z_m$ aus S^N sind. Diese Hyperebenen bestimmen einen linearen Raum im $S^{N(N+2)}$, dessen Durchschnitt mit der Segreschen Mf. $S_{N;N}$ gerade das Bild M^* von M ist. Zur näheren Untersuchung dieser M^* stehen die Hilfsmittel bereit (W. Burau [5]), doch wollen wir das jetzt nicht weiter verfolgen. —

[5]) Burau, W., Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie. (Collectanea Mathematica Barcelona, im Druck.)

An den Gleichungen (1) für M sieht man, daß M die Diagonalmannigfaltigkeit Δ_0 aus $S^N \times S^N$, die aus allen Punkten $\Delta_P = P \times P$ besteht, enthält. Nun sei $P = (1, p_1, \ldots, p_N)$ ein Punkt aus S^N, der nicht in der Fernhyperebene $x_0 = 0$ liegt. Die Gleichungen für den Tangentialraum T an die alg. Mf. M aus $S^N \times S^N$ im Punkte $\Delta_P = P \times P = (1, p_1, \ldots, p_N; 1, p_1, \ldots, p_N)$ ergeben sich aus den Gleichungen (1) für M durch partielle Differentiation, wobei zu berücksichtigen ist, daß $S^N \times S^N$ doppelt-projektiver Raum ist. Diese Gleichungen für T lassen sich wieder zusammenfassen zu

$$(3) \qquad \text{Rang} \begin{vmatrix} 0 & x_1 x_0' - x_0 x_1' & \ldots & x_N x_0' - x_0 x_N' \\ 1 & p_1 & \ldots & p_N \\ z_{00} & z_{01} & \ldots & z_{0N} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ z_{m0} & z_{m1} & \ldots & z_{mN} \end{vmatrix} \leqq m + 2.$$

An ihnen erkennt man, daß alle diejenigen Punkte Δ_P von M einfache Punkte von M sind, für die $P = (1, p_1, \ldots, p_N)$ nicht in L liegt.

§ 2.

Die Definition der Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$.

Im S^N seien A^r und B^s zwei irreduzible, r- bzw. s-dimensionale alg. Mfn. und $r + s \leqq N$. $(\alpha) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ und $(\beta) = (\beta_0, \ldots, \beta_N)$ seien über dem Grundkörper k unabhängige allgemeine Punkte von A bzw. B. *Unter $A^r \times B^s$ wollen wir, wie in* F., *die $(r+s)$-dimensionale alg. Mf. im doppelt projektiven Raum $S^N \times S^N$ verstehen, die dort durch den allgemeinen Punkt $(\alpha; \beta) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N; \beta_0, \ldots, \beta_N)$ über k definiert ist.* — Die Dimension m des allgemeinen linearen Raumes L^m aus S^N, der in der Definition der Korrespondenz $\mathfrak{K}$ (§ 1) auftritt, wählen wir nun zu $m = \text{Dim } L^m = N - r - s - 1$ und erhalten für die zur Korrespondenz $\mathfrak{K}$ gehörige alg. Mf. M aus $S^N \times S^N$ die $\text{Dim } M = N + m + 1 = 2N - r - s$. Die Dimensionen der alg. Mfn. $A^r \times B^s$ und M^{2N-r-s} sind also komplementär. —

Bemerkung. Wenn $r + s = N$, also $m = -1$ ist, muß man sinngemäß L^{-1} als leer ansetzen und wird auf $M^N = \Delta_0$ geführt. In den Gleichungen § 1, (1), fallen dann die z_{ik} fort. —

Nun sei P ein isolierter Schnittpunkt von A und B. Dann gehört $\Delta_P = P \times P$ sowohl zu $A \times B$ als auch zu M, und wir könnten die Multiplizität durch

$$(4) \qquad \mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \Delta_P; S^N \times S^N)$$

definieren, da sich wegen der Komplementarität der Dimensionen auf der rechten Seite der Multiplizitätsbegriff von Weil, F VI$_1$, anwenden läßt, falls wir noch zeigen, daß Δ_P eigentliche Komponente von $(A \times B) \cap M$ im $S^N \times S^N$ ist, d. h. hier, daß Δ_P ebenfalls isoliert ist in $(A \times B) \cap M$.

Wenn ein Punkt $Q \times R$ zum Durchschnitt von $A \times B$ mit M gehört, so bedeutet dies gemäß der Definition der Korrespondenz $\overline{\mathfrak{R}}$ im S^N, daß Q in A, R in B und überdies R auf der Verbindungsgeraden von Q mit einem Punkte aus L liegt, d. h. daß R sowohl in B als auch auf dem die alg. Mf. A aus dem linearen Raum L als Scheitel projizierenden Kegel liegt. — Darin besteht der Zusammenhang unserer Definition mit dem Ansatz von SEVERI (s. Einl.) — Die Isoliertheit von Δ_P in $(A \times B) \cap M$ unter Voraussetzung der Isoliertheit von P in $A \cap B$ folgt sofort aus dem

Lemma. *Schneidet man $A^r \times B^s$ statt mit der Diagonalmannigfaltigkeit Δ_0^N aus $S^N \times S^N$ mit der Δ_0 umfassenden alg. Mf. M^{2N-r-s}, so treten zu den durch Δ_Q, Q in $A \cap B$, gegebenen Schnittpunkten von $A \times B$ mit Δ_0 höchstens noch endlich viele Schnittpunkte $Q \times R$ hinzu.*

Wäre Δ_P nicht isoliert in $(A \times B) \cap M$, so müßte nach diesem Lemma Δ_P in einer mindestens eindimensionalen alg. Mf. Δ_C aus Δ_0 enthalten sein, also wäre auch P eingebettet in C aus $A \cap B$.

Beweis des Lemmas nach einem Prinzip von VAN DER WAERDEN[6]) durch Einführung einer neuen Korrespondenz $\overline{\mathfrak{R}}$ im S^N und Konstantenzählung: $\overline{\mathfrak{R}}$ ist eine Korrespondenz zwischen den Punkten von B und gewissen Punkten des S^N. Ein allgemeines Punktepaar von $\overline{\mathfrak{R}}$ bestehe aus einem allgemeinen Punkt (β) von B^s und einem allgemeinen Punkt auf der Verbindungsgeraden von (β) mit einem allgemeinen Punkt (α) von A^r. Dann ist nach dem Prinzip der Konstantenzählung

$$\text{Dim } \overline{\mathfrak{R}} = s + (r+1) = a + b, \tag{5}$$

wobei a die Dimension der Bildmannigfaltigkeit V^a der Korrespondenz ist, also der alg. Mf. aller Punkte des S^N auf einer Verbindungsgeraden von Punkten von A und B, und b die Dimension der auf B^s gelegenen Urbildmannigfaltig U_η^b eines allgemeinen Punktes (η) von V^a ist. — Diese Korrespondenz $\overline{\mathfrak{R}}$ verengen wir nun dadurch zu einer Korrespondenz $\overline{\mathfrak{R}}_1$, daß wir V^a noch mit $r+s+1$ allgemeinen Hyperebenen schneiden, die ihrerseits dem $L^{N-r-s-1}$ beschreiben. Das ist eine Korrespondenz zwischen gewissen Punkten von B und den in L gelegenen Punkten der obigen Verbindungsgeraden von A und B. Die Punkte $Q \times R$ aus $(A \times B) \cap M$ mit $Q \neq R$ ergeben durch $\overline{QR} \cap L = W$ Paare Q, W dieser Korrespondenz $\overline{\mathfrak{R}}_1$, und zum Beweis des Lemmas genügt es zu zeigen, daß die Urmannigfaltigkeit von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ auf B die Dimension $d = 0$ hat. Die Bildmannigfaltigkeit von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ ist der Schnitt von V^a mit $r+s+1$ allgemeinen Hyperebenen, hat also die Dimension $a-r-s-1$. Die auf B liegende Urbildmannigfaltigkeit

[6]) WAERDEN, B. L. VAN DER, Zur algebraischen Geometrie XIV. Schnittpunktzahlen von algebraischen Mannigfaltigkeiten. (Math. Ann., Bd. 115, S. 619—642. 1938.)

eines allgemeinen Punktes der Bildmannigfaltigkeit $V^a \cap L$ hat wie bei $\overline{\mathfrak{R}}$ die Dimension b, weil die Hyperebenen als allgemein vorausgesetzt wurden, also ein allgemeiner Punkt von $V^a \cap L$ auch allgemeiner Punkt von V^a ist. Daher ist, wieder nach dem Prinzip der Konstantenzählung und nach (5), einerseits $\operatorname{Dim} \overline{\mathfrak{R}}_1 = (a-r-s-1)+b = 0$ und andererseits $\operatorname{Dim} \overline{\mathfrak{R}}_1 = c+d$, wobei d die Dimension der Urmannigfaltigkeit von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ war und c die Dimension der Bildmannigfaltigkeit eines allgemeinen Punktes dieser Urmannigfaltigkeit ist. Aus $c+d=0$ folgt sogleich $d=0$ und damit die Behauptung des Lemmas. —

Korollar. *P ist in $A \cap B$ dann und nur dann isoliert, wenn Δ_P in $(A \times B) \cap M$ isoliert ist.*

Beweis. Nach dem Lemma bleibt nur noch die Notwendigkeit der Bedingung nachzuweisen. — Wenn P eingebettet ist in C aus $A \cap B$, dann ist Δ_P eingebettet in Δ_C aus $(A \times B) \cap \Delta_0 \leq (A \times B) \cap M$.

Wie bereits gezeigt, folgt aus dem Lemma, daß folgende Definition sinnvoll ist:

Definition. *Die Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$ eines isolierten Schnittpunktes P zweier alg. Mfn. A^r und B^s des S^N mit $r+s \leqq N$ ist $\mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \Delta_P; S^N \times S^N)$. Dabei ist rechts der Multiplizitätsbegriff von* Weil, F. VI$_1$, *auf die wieder irreduziblen algebraischen Mfn. $A^r \times B^s$ und M^{2N-r-s} von bzgl. $S^N \times S^N$ komplementären Dimensionen anzuwenden.*

§ 3.

Vergleich mit dem Multiplizitätsbegriff von Weil.

In dem von Weil, F., behandelten Fall, daß A^r und B^s sich in einer über k irreduziblen alg. Mf. U^n, $r+s=n$, einbetten lassen, für die P einfacher Punkt ist, ergibt sich die Übereinstimmung seiner Multiplizität mit unserer nach folgendem

Satz 1. *Die alg. Mfn. A^r und B^s seien eingebettet in die irreduzible alg. Mf. U^n aus S^N, bzgl. der A^r und B^s komplementäre Dimension haben, $r+s=n$. Wenn dann ein isolierter Schnittpunkt P von A und B einfacher Punkt von U ist, gilt $\mu(A \cdot B, P) = i(A \cdot B, P; U)$.*

Zum Beweis muß man sich die Definition von Weil näher ansehen. Er arbeitet inhomogen, also im affinen Raum R^N, und führt die Definition von i zurück auf den vorher in F V$_1$ behandelten Spezialfall der Multiplizität j eines isolierten Schnittpunktes einer alg. Mf. mit einem linearen Raum Λ komplementärer Dimension:

$$i(A \cdot B, P; U) = j((A \times B) \cdot \Lambda, \Delta_P; R^N \times R^N). \tag{6}$$

Für Λ kann man jeden $(2N-n)$-dimensionalen linearen Raum im $R^N \times R^N$ nehmen, der sich durch ein Gleichungssystem $F_i(X) = F_i(X')$, $X = (x_1, \ldots, x_s)$, $X' = (x_1', \ldots, x_s')$, $i = 1, \ldots, n$, so beschreiben läßt, daß

die Linearformen $F_i(X)$ ein System U^n in P uniformisierender Linearformen sind; d. h. der durch $F_i(X) = F_i(P)$, $i = 1, \ldots, n$, im R^N beschriebene lineare Raum R^{N-n} darf mit dem Tangentialraum T^n an U^n in P nur den Punkt P gemeinsam haben, F. IV$_e$.

In unserer Definition

$$\mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \Delta_P; S^N \times S^N) \tag{4}$$

spezialisieren wir nun M so, daß nach Inhomogenisierung M übergeht in einen linearen Raum A von Weil. Anschließend brauchen wir nur noch zu zeigen, daß bei dieser Spezialisierung die Multiplizität erhalten bleibt, also keine Schnittpunkte zusammenrücken. Dies wird daraus folgen, daß P einfacher Punkt von U ist.

M^{2N-n} aus $S^N \times S^N$ ist nach § 1 die alg. Mf. der Korrespondenz $\mathfrak{K}$ derjenigen Punktepaare des S^N, deren Verbindungsgerade den allgemeinen linearen Raum L^{N-n-1} des S^N trifft, $m = N - n - 1$. Wir spezialisieren nun L zu dem allgemeinen m-dimensionalen linearen Raum L' in der Fernhyperebene des S^N. In den aus (1), § 1, folgenden Gleichungen für M spezialisieren wir also $z_{00}, z_{10}, \ldots, z_{N-n-1,0}$ zu 0. Nach Inhomogenisierung $x_0 = x_0' = 1$ ergeben sich die Gleichungen für die so spezialisierte Mannigfaltigkeit M' im $R^N \times R^N$ aus

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_N \\ 1 & x_1' & \ldots & x_N' \\ 0 & z_{01} & \ldots & z_{0N} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & z_{m1} & \ldots & z_{mN} \end{pmatrix} \leqq m + 2 = N - n + 1.$$

Zur Beschreibung von M' können wir unter ihnen n Gleichungen auswählen, die sich durch Nullsetzen solcher $(m+3)$-reihigen Unterdeterminanten ergeben, die die erste Spalte der obigen Matrix enthalten. Dann ist M' im $R^N \times R^N$ durch lineare Gleichungen

$$F_i(x_1, \ldots, x_N) = F_i(x_1', \ldots, x_N'), \qquad i = 1, \ldots, n$$

beschrieben, kommt also nach dem oben Gesagten als linearer Raum A^{2N-n} aus $R^N \times R^N$ im Sinne von Weil in Frage.

Der Schnittpunkt $P = (1, p_1, \ldots, p_N)$ von A' und B' im S^N geht bei der Inhomogenisierung in den Punkt $(p_1, \ldots, p_N)$ aus R^N über, der wieder P genannt sei. Dann beschreiben im R^N die sich aus

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_N \\ 1 & p_1 & \ldots & p_N \\ 0 & z_{01} & \ldots & z_{0N} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & z_{m1} & \ldots & z_{mN} \end{pmatrix} \leqq m + 2 = N - n + 1$$

ergebenden Gleichungen $F_i(X) = F_i(P)$ einen $(N-n)$-dimensionalen Raum R^{N-n}, von dem wir zeigen müssen, daß er zum Tangentialraum

T^n an U^n in dem als einfach vorausgesetzten Punkte P von U transversal ist, d. h. ihn nur in P schneidet. Dies ist aber klar, da R^{N-n} allgemeiner linearer Raum durch P ist, denn R^{N-n} ergibt sich aus P durch Abtragen des linearen Vektorgebildes mit den Basisvektoren $\{z_{h1}, \ldots, z_{hN}\}$, $h = 1, \ldots, m$, deren Komponenten die Unbestimmten z_{hj} sind. Nach Inhomogenisieren kann man aiso M' als einen linearen Raum A^{2N-n} in der Multiplizitätsdefinition von Weil verwenden.

Wir brauchen demnach nur noch zu zeigen, daß bei der Spezialisierung von L in L', und damit von M in M', die Multiplizität auf der rechten Seite von (4) erhalten bleibt, daß dabei also nicht ein von $\Delta_P = P \times P$ aus $S^N \times S^N$ verschiedener Punkt $P_1 \times P_2$ aus $(A \times B) \cap M$ in $P \times P$ übergeht. — Zunächst kann so ein Punkt $P_1 \times P_2$ nicht die Gestalt $\Delta_{P_1} = P_1 \times P_1$ haben, weil sonst P_1 in $A \cap B$ läge, also der Punkt P aus $A \cap B$ eingebettet wäre in den geometrischen Ort von P_1 über k, was der vorausgesetzten Isoliertheit von P als Schnittpunkt von A und B widerspräche. — Wenn aber $P_1 \neq P_2$ wäre im Punkte $P_1 \times P_2$ aus $(A \times B) \cap M$, dann müßte, da M die alg. Mf. der Korrespondenz $\mathfrak{K}$ ist, P_2 im Verbindungsraum $\overline{P_1 L}$ aus S^N enthalten sein. Dieser $(N-n)$-dimensionale lineare Raum $\overline{P_1 L}$ würde also U^n sowohl in P_1 als auch in P_2 schneiden, da $P_1 \subset A \subset U$ und $P_2 \subset B \subset U$. Bei der Spezialisierung von L in L' sollten nun P_1 und P_2 beide in P übergehen. Also schnitte der lineare Raum $\overline{P L'}$ die Mf. U^n in P mindestens mit der Vielfachheit 2. Andererseits ist aber $\overline{P L'}$ allgemeiner $(N-n)$-dimensionaler linearer Raum durch den einfachen Punkt P von U^n, da $\overline{P L'}$ nach Inhomogenisieren in den oben diskutierten linearen Raum R^{N-n} aus R^N übergeht, q. e. a.

§ 4.

Eigenschaften von $\mu(A \cdot B, P)$.

1. *Die Definition von $\mu(A^r \cdot B^s, P)$ ist auch sinnvoll, wenn $r = 0$, also A^r der Punkt P ist.* Der Punkt $P_1 \times P_2$ gehört genau dann zu $(P \times B) \cap M$, wenn erstens $P_1 = P$ ist und zweitens (gemäß der Definition der Korrespondenz $\mathfrak{K}$) P_2 im Durchschnitt von B mit dem $(N-s)$-dimensionalen Verbindungsraum $\overline{PL}$ liegt. Da L ein allgemeiner linearer Raum ist, ist $\overline{PL}$ ein allgemeiner $(N-s)$-dimensionaler Raum durch P. Wir werden nun sogleich

$$i((P \times B) \cdot M, \Delta_P; S^N \times S^N) = i(B \cdot \overline{PL}, P; S^N) \tag{7}$$

zeigen und damit den

Satz 2. *Die Schnittmultiplizität $\mu(P \cdot B, P)$ des auf der alg. Mf. B liegenden Punktes P mit B ist gleich der Vielfachheit von P als Punkt von B.*

Beweis von (7) mittels des Theorems F. VI_3, th. 9; statt direkt $P \times B$ mit M zu schneiden, bilden wir zunächst den Durchschnitt $P \times \overline{PL}$ von $P \times S^N$ mit M. Dann besagt th. 9, daß die Beziehung $\Delta_P \leqq (P \times B) \cap M = ((P \times S^N) \cap M) \cap (P \times B) = (P \times \overline{PL}) \cap (P \times B)$ nicht nur punktmengenmäßig richtig ist, sondern auch bzgl. der Vielfachheit von Δ_P, nämlich

$$i((P \times B) \cdot M, \Delta_P; S^N \times S^N)$$
$$= i((P \times S^N) \cdot M, P \times \overline{PL}; S^N \times S^N) \cdot i((P \times B) \cdot (P \times \overline{PL}), \Delta_P; S^N \times S^N).$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist eins nach dem Kriterium für $i = 1$ in F. VI_2, th. 6, da $P \times S^N$ und M transversal zueinander sind in Δ_P auf $P \times \overline{PL}$. Der zweite Faktor auf der rechten Seite läßt sich nach F.VI_3, th. 7, schreiben als ein Produkt $i(P \cdot P, P; S^N) \cdot i(B \cdot \overline{PL}, P; S^N)$, in dem der erste Faktor ebenfalls wieder eins ist.

2. *Die Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$ ist ihrer Natur nach algebraisch.* Das soll heißen: Wenn A und B sich über dem Körper k definieren lassen und durch einen Isomorphismus σ der Körper k auf k^σ, A auf A^σ und B auf B^σ abgebildet werden, dann gilt

Satz 3.

$$\mu(A^\sigma \cdot B^\sigma, P^\sigma) = \mu(A \cdot B, P).$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem entsprechenden Satz für i in F. VI_2, th. 3, da die Gleichungen (1) in § 1 zeigen, daß M^σ gleich M über k^σ ist.

3. Satz 4. *μ ist kommutativ*: $\mu(A \cdot B, P) = \mu(B \cdot A, P)$.

Beweis. Wenn wir in der μ definierenden Gleichung am Ende von § 2 den ersten Faktor S^N mit dem zweiten Faktor S^N des Produktes $S^N \times S^N$ vertauschen, geht $A \times B$ in $B \times A$ über, aber M bleibt dabei erhalten, wie man wieder an den Gleichungen (1) in § 1 sieht.

4. *Das Kriterium für $\mu = 1$.*

Definition. *Die irreduziblen alg. Mfn. A^r und B^s heißen transversal im Punkte P aus $A \cap B$, wenn P einfacher Punkt von A und von B ist und dort der Durchschnitt der beiden Tangentialräume T_1 an A und T_2 an B nur aus P besteht.*

Satz 5. *A und B sind dann und nur dann transversal in P, wenn $\mu(A \cdot B, P) = 1$ und P isolierter Schnittpunkt von A und B ist.*

Beweis durch Zurückführung auf den entsprechenden Satz für i in F. VI_2, th. 6; nach diesem Theorem sind $A \times B$ und M dann und nur dann transversal in Δ_P, wenn $i((A \times B) \cdot M, \Delta_P; S^N \times S^N) = 1$ und Δ_P isoliert ist in $(A \times B) \cap M$. Nun ist nach dem Korollar des Lemmas in § 2 Δ_P dann und nur dann isoliert in $(A \times B) \cap M$, wenn es P ist in $A \cap B$. Zunächst wollen wir zeigen, daß, falls A und B transversal sind in P, auch $A \times B$ und M transversal sind in Δ_P.

Wenn P einfacher Punkt von A und von B, ist auch Δ_P einfacher Punkt von $A \times B$, und der Tangentialraum in Δ_P an $A \times B$ ist

$T_1 \times T_2$. Der Tangentialraum in Δ_P an M werde, wie am Ende von § 1 T genannt. Zu beweisen ist $(T_1 \times T_2) \cap T = \Delta_P$. Ein Punkt $R_1 \times R_2 \neq \Delta_P$ aus $(T_1 \times T_2) \cap T$ kann nicht die Gestalt Δ_R haben, weil sonst P und R beide in $T_1 \cap T_2$ lägen, was der Transversalität von A und B in P widerspräche. Also müßte $R_1 \neq R_2$ sein. Aus den Gleichungen (3), § 1, für T und aus $R_1 \times R_2$ in T würde dann für die Verbindungsgerade $\overline{R_1 R_2}$ des Punktepaares R_1, R_2 folgen, daß sie den linearen Raum $\overline{PL}$ in ihrem Fernpunkte R_∞ schnitte. Da $\overline{R_1 R_2}$ im Verbindungsraum $\overline{T_1 T_2}$ von T_1 und T_2 läge, würden P und R_∞ beide sowohl in $\overline{T_1 T_2}$ als auch in $\overline{PL}$ enthalten sein. Das ist aber unmöglich, denn wegen $\operatorname{Dim} \overline{T_1 T_2} = \operatorname{Dim} T_1 + \operatorname{Dim} T_2 - \operatorname{Dim}(T_1 \cap T_2) = r + s - 0 = 2N - \operatorname{Dim} \overline{PL}$ haben $\overline{T_1 T_2}$ und $\overline{PL}$ komplementäre Dimensionen; außerdem ist $\overline{PL}$ ein allgemeiner Raum durch P. Also sind $A \times B$ und M transversal in Δ_P, womit $i = \mu = 1$ und die Isoliertheit der Schnittpunkte Δ_P bzw. P nachgewiesen ist.

Beweis der Umkehrung. Wenn A und B im Punkte P aus $A \cap B$ nicht transversal sind, aber P isolierter Schnittpunkt von A und B ist, dann kann das a) daran liegen, daß P zwar einfacher Punkt von A und B, aber $\operatorname{Dim} T_1 \cap T_2 \geqq 1$ ist, oder b) daran, daß P mehrfacher Punkt von A oder B ist. Im Falle a) muß $T_1 \cap T_2$ mindestens eine Gerade G durch P enthalten, also auch Δ_G sowohl in $T_1 \times T_2$ als auch in Δ_0 und damit in T liegen. Dann folgt aus der Isoliertheit von Δ_P in $(A \times B) \cap M$ nach F. VI$_3$, th. 6, daß $\mu = i \geqq 2$ ist. Im Falle b) sei etwa P mehrfacher Punkt von A'. Dann ist auch Δ_P mehrfacher Punkt von $A \times B$, also sind $A \times B$ und M in Δ_P nicht transversal. Zusammen mit der Isoliertheit von Δ_P in $(A \times B) \cap M$ folgt daraus wieder nach F. VI$_3$, th. 6, $\mu = i \geqq 2$, q. e. d.

5. *Projektionssatz.* A sei eine alg. Mf. im Produktraum $S^D \times S^N$ und habe $(\alpha'; \alpha'') = (\alpha'_0, \ldots, \alpha'_D; \alpha''_0, \ldots, \alpha''_N)$ als allgemeinen Punkt über dem Grundkörper k. Unter der *Projektion A' von A auf den ersten Faktor S^D in $S^D \times S^N$* versteht man diejenige alg. Mf. im S^D, die dort als Ort des allgemeinen Punktes $(\alpha') = (\alpha'_0, \ldots, \alpha'_D)$ über k definiert ist, F. IV$_3$. Die *Projektion* von A auf A' nennt man *regulär* im Punkte P' von A', wenn die letzten Koordinaten $(\alpha''_0, \ldots, \alpha''_N)$ des obigen allgemeinen Punktes $(\alpha'; \alpha'')$ von A sich rational (genauer als Quotienten je zweier Formen gleichen Grades) durch die ersten Koordinaten $\alpha'_0, \ldots, \alpha'_D$ von $(\alpha'; \alpha'')$ ausdrücken lassen und außerdem für $P' = (1, p'_1, \ldots, p'_D)$ die Nenner von Null verschieden sind, F. IV$_7$.

Für die Multiplizität i von Weil gilt folgender Projektionssatz F. VI$_3$, th. 8:

$$(8) \qquad i(A' \cdot B, P'; S^D) = i(A \cdot (B \times S^N), P; S^D \times S^N).$$

Hierbei liegen die alg. Mfn. A und B im $S^D \times S^N$ bzw. S^D und P in $A \cap (B \times S^N)$. Die Projektion P' von P auf den ersten Faktor S^D ist

Schnittpunkt von A' und B, und die Projektion von A auf A' ist als regulär in diesem Punkte P' vorausgesetzt. Ferner sei die rechte Seite von (8) sinnvoll, d. h. P isoliert in $A \cap (B \times S^N)$ und $\dim A + \dim (B \times S^N) = D + M$. Dann ist auch die linke Seite von (8) sinnvoll, denn, wieder nach F. VI$_3$, th. 8, ist P isoliert in $A \cap (B \times S^N)$ dann und nur dann, wenn P' es ist in $A' \times B$, und außerdem gilt, wegen $\dim A = \dim A'$ bei regulärer Projektion, $\dim A' + \dim B = \dim A + \dim B = (D + N) - N = D$.

Wir wollen den Projektionssatz auf unsere Vielfachheit μ übertragen. Folgende Bezeichnungsweise ist dabei praktisch: Wenn A eine alg. Mf. im vierfach projektiven Raum $S^K \times S^L \times S^M \times S^N$ ist mit dem allgemeinen Punkt $(x; \lambda; \mu; \nu)$ über k, sei mit $A'_{1,3}$ bezeichnet die Projektion von A auf das Produkt $S^K \times S^M$ des ersten mit dem dritten Faktor S, also der Ort von $(x; \mu)$ über k im $S^K \times S^M$, usw. Mit $A_{1,3,2,4}$ (ohne '!) wollen wir die alg. Mf. im $S^K \times S^M \times S^L \times S^N$ bezeichnen, die der Ort von $(x; \mu; \lambda; \nu)$ über k ist (Vertauschung der beiden mittleren Faktoren S^L und S^M), usw. —

Satz 6. *Der Punkt $P = P' \times P''$ sei Schnittpunkt der beiden alg. Mfn. A und $B \times S^N$ aus $S^D \times S^N$. Die Projektion A'_1 von A auf S^D sei regulär in P'. — Der Punkt P' ist isoliert in $A'_1 \cap B$ dann und nur dann, wenn P es ist in $A \cap (B \times S^N)$. Falls P isoliert ist, gilt $\mu(A'_1 \cdot B, P') = \mu(A \cdot (B \times S^N), P)$.*

Beweis. Nach Definition von μ ist

$$\mu(A \cdot (B \times S^N), P' \times P'') = i((A \times B \times S^N) \cdot M, \Delta_{P' \times P''}; S^D \times S^N \times S^D \times S^N)$$

und

$$\mu(A'_1 \cdot B, P') = i((A'_1 \times B) \cdot \bar{M}, \Delta_{P'}; S^D \times S^D).$$

Es sei $r = \dim A = \dim A'_1$ und $s = \dim B$. Wir gehen aus von der Bemerkung, daß zwar M und $\bar{M}$ verschiedene Dimensionen haben, nämlich $\dim M = 2(D + N) - r - s - N$ und $\dim \bar{M} = 2D - r - s$, aber nicht die beiden linearen Räume L aus $S^D \times S^N$ und $\bar{L}$ aus S^D, die in den Definitionen der von M bzw. $\bar{M}$ beschriebenen Korrespondenzen $\mathfrak{R}$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}$ auftreten. Es ist nämlich $\dim L = D + N - (r + s + N) - 1 = D - (r + s) - 1 = \dim \bar{L}$. $\bar{L}$ wird im S^D von den Punkten $Z'_i = (z'_{i0}, \ldots, z'_{iD})$, $i = 0, \ldots, D - r - s - 1$, aufgespannt und L im $S^D \times S^N$ von den Punkten $Z_i = (Z'_i, Z''_i) = (z'_{i0}, \ldots, z'_{iD}; z''_{i0}, \ldots, z''_{iN})$, $i = 0, \ldots, D - r - s - 1$, wobei die z'_{ik} und die z''_{ik} Unbestimmte sind. Wenn noch $(\xi') = (\xi'_0, \ldots, \xi'_D)$ und $(\xi'') = (\xi''_0, \ldots, \xi''_N)$ allgemeine Punkte von S^D bzw. S^N sind, kann man gemäß der Definition in § 1 als allgemeinen Punkt für M nehmen:

$$(\xi'; \xi''; \eta'; \eta'') = (\xi'; \xi''; \Sigma t_i Z'_i + t_{D-r-s} \cdot (\xi'); \Sigma t_i Z''_i + t_{D-r-s} \cdot (\xi''))$$

und für $\bar{M}$:

$$(\xi', \eta') = (\xi'; \Sigma t_i Z'_i + t_{D-r-s} \cdot (\xi').$$

Die letzten Koordinaten η'' des allgemeinen Punktes für M lassen sich rational durch die ξ', ξ'', η' ausdrücken, weil man aus den Ausdrücken für die ξ' und η' die $t_0, \ldots, t_{D-r-s}$ rational berechnen und diese dann in die Ausdrücke für die η'' einsetzen kann. Also ist die Projektion $M'_{1,2,3}$ von M auf den $S^D \times S^N \times S^D$ regulär im allgemeinen Punkt $(\xi'; \xi''; \eta')$, aber auch in dem speziellen Punkte $P' \times P'' \times P'$, weil P' nicht in $\bar{L}$ liegt. — Da in dem allgemeinen Punkte $(\xi'; \xi''; \eta')$ von $M'_{1,2,3}$ die ξ'' einen allgemeinen Punkt des S^N bilden, ergibt sich, nach Vertauschung des zweiten und dritten Faktors in $S^D \times S^N \times S^D$, also beim Übergang von $M'_{1,2,3}$ zu $(M'_{1,2,3})_{1,3,2}$, daß diese alg. Mf. aus $S^D \times S^D \times S^N$ gleich $\bar{M} \times S^N$ ist, denn $(\xi'; \eta')$ ist allgemeiner Punkt von $\bar{M}$ aus $S^D \times S^D$.

Nun liegt es nahe, zweimal hintereinander das oben in (8) zitierte Theorem anzuwenden. Dabei machen die Voraussetzungen über Isoliertheit keine Schwierigkeiten, denn nach dem Korollar aus § 2 ist die Isoliertheit von $P' \times P''$ in $A \cap (B \times S^N)$ äquivalent mit der Isoliertheit von $P' \times P'' \times P' \times P''$ in $(A \times B \times S^N) \cap M$, und diese wieder äquivalent nach F. VI$_1$, th. 8, mit der Isoliertheit von $P' \times P'' \times P'$ in $(A \times B) \cap M'_{1,2,3}$ oder von $P' \times P' \times P''$ in $(A \times B)_{1,3,2} \cap (M'_{1,2,3})_{1,3,2} = (A \times B)_{1,3,2} \cap (\bar{M} \times S^N)$. Diese ist, wieder nach F. VI$_3$, th. 8, äquivalent mit der Isoliertheit von $P' \times P'$ in $(A'_1 \times B) \cap \bar{M}$, also nach § 2 mit der Isoliertheit von P' in $A'_1 \cap B$. Demnach gilt, wenn wir im Symbol i die Bezeichnung des Produktraumes $S \times S \times \ldots$ weglassen,

$$\mu(A \cdot (B \times S^N), P' \times P'') = i((A \times B \times S^N) \cdot M, P' \times P'' \times P' \times P'')$$
$$= i((A \times B) \cdot M'_{1,2,3}, P' \times P'' \times P') = i((A \times B)_{1,3,2} \cdot (\bar{M} \times S^N), P' \times P' \times P'')$$
$$= i((A' \times B) \cdot \bar{M}, P' \times P') = \mu(A' \cdot B, P'), \text{ q. e. d.}$$

6. *Unter Invarianz bei biregulärer, birationaler Korrespondenz versteht man nach* F. IV$_7$ *folgendes: U sei eine irreduzible alg. Mf. aus $S^D \times S^N$, deren Projektion U'_1 auf S^D und U'_2 auf S^N beide regulär seien längs U'_1 und U'_2, d. h. in deren allgemeinen Punkten. Dies bedeutet, daß sich die Koordinaten eines allgemeinen Punktes von U'_2 rational ausdrücken lassen in den Koordinaten eines passenden allgemeinen Punktes von U'_1 und umgekehrt. Man spricht dann von einer birationalen Korrespondenz T zwischen U'_1 und U'_2.* Den auf U'_1 liegenden irreduziblen alg. Mfn. A'_1 und B'_1 mögen bei T die alg. Mfn. A'_2 und B'_2 auf U'_2 entsprechen und dabei der isolierte Schnittpunkt P'_1 aus $A'_1 \cap B'_1$ übergehen in P'_2 aus $A'_2 \cap B'_2$. Die birationale Korrespondenz T sei *biregulär* in P'_1 und P'_2, d. h. die Projektionen von U auf U'_1 und U'_2 seien auch noch regulär in P'_1 bzw. P'_2. Mit diesen Bezeichnungen gilt folgender

Satz 7. *Die birationale Korrespondenz T zwischen den alg. Mfn. A'_1, B'_1 auf U'_1 in S^D und A'_2, B'_2 auf U'_2 in S^N sei biregulär in den Punkten P'_1 aus $A'_1 \cap B'_1$ und P'_2 aus $A'_2 \cap B'_2$. Wenn P'_1 in $A'_1 \cap B'_1$ und damit auch P'_2 in $A'_2 \cap B'_2$ isoliert ist, gilt $\mu(A'_1 \cdot B'_1, P'_1) = \mu(A'_2 \cdot B'_2, P'_2)$.*

Wir können den Beweis nicht wie sonst F. VI$_3$, th. 10, auf das Assoziativgesetz gründen, da dies hier nicht durchweg gilt (s. die Gegenbeispiele im nächsten § 5), sondern gehen so vor: Mit A und B seien die auf U im $S^D \times S^N$ liegenden alg. Mfn. bezeichnet, die auf U_1' die Projektionen A_1' und B_1' bzw. auf U_2' die Projektionen A_2' und B_2' besitzen, so daß $P = P_1' \times P_2'$ isolierter Schnittpunkt von A und B ist. Zum Beweis des Satzes genügt natürlich der Nachweis der Gleichung $\mu(A_1' \cdot B_1', P_1') = \mu(A \cdot B, P)$, da die Voraussetzungen symmetrisch sind. Wieder sei $r = \text{Dim } A_1' = \text{Dim } A = \text{Dim } A_2'$ und $s = \text{Dim } B_1' = \text{Dim } B = \text{Dim } B_2'$.

In der Gleichung

$$(9) \qquad \mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \Delta_P;\ S^D \times S^N \times S^D \times S^N)$$

beschreibt nach Definition von μ die $(2D + 2N - r - s)$-dimensionale alg. Mf. M aus $S^D \times S^N \times S^D \times S^N$ eine irreduzible Korrespondenz $\mathfrak{K}$ im $S^D \times S^N$, zu der ein Punktepaar aus $S^D \times S^N$ genau dann gehört, wenn seine Verbindungsgerade den allgemeinen $(D + N - r - s - 1)$-dimensionalen linearen Raum L aus $S^D \times S^N$ trifft. Nun spezialisieren wir L zu $\bar{L} \times S^N$, wobei $\bar{L}$ ein allgemeiner $(D - r - s - 1)$-dimensionaler linearer Raum aus S^D sei. Dabei geht M über in eine alg. Mf. M^* aus $S^D \times S^N \times S^D \times S^N$, die folgende Korrespondenz $\mathfrak{K}^*$ im $S^D \times S^N$ beschreibt: Ein Punktepaar $Q_1 \times Q_2$, $R_1 \times R_2$ gehört zu $\mathfrak{K}^*$, wenn die Verbindungsgerade der in S^D liegenden Punkte Q_1 und R_1 den allgemeinen $(D - r - s - 1)$-dimensionalen linearen Raum $\bar{L}$ aus S^D trifft, denn Q_2 und R_2 aus S^N sind nach der Spezialisierung von L in $\bar{L} \times S^N$ keinen Bedingungen mehr unterworfen. Mit anderen Worten, Q_1 und R_1 müssen ein Paar derjenigen Korrespondenz $\bar{\mathfrak{K}}$ des S^D sein, die von der in $\mu(A_1' \cdot B_1', P_1') = i((A_1' \times B_1') \cdot \bar{M}, P_1' \times P_1';\ S^D \times S^D)$ auftretenden alg. Mf. $\bar{M}$ beschrieben wird. Wenn wir daher im Produktraum $S^D \times \times S^N \times S^D \times S^N$ den zweiten mit dem dritten Faktor vertauschen, in der unter 5. erklärten Bezeichnung also von M^* zu M^*_{1324} übergehen, ist $M^*_{1324} = \bar{M} \times S^N \times S^N$.

Nun läßt sich der Beweis des Satzes 7 durch den Nachweis erbringen, daß erstens die rechte Seite von (9) sich nicht ändert bei der Spezialisierung von M in M^* und daß zweitens

$$(10) \qquad i((A \times B) \cdot M^*, \Delta_P; S^D \times S^N \times S^D \times S^N) = i((A_1' \times B_1') \cdot \bar{M}, P_1' \times P_1'; S^D \times S^D)$$

gilt. Die zweite Behauptung soll zuerst bewiesen werden. Die linke Seite von (10) ist nach Vertauschung der S gleich

$$i((A \times B)_{1324} \cdot (\bar{M} \times S^N \times S^N), P_1' \times P_1' \times P_2' \times P_2';\ S^D \times S^D \times S^N \times S^N)$$

und dies nach dem schon in (8) zitierten Projektionssatz F. VI$_3$, th. 8, gleich $i((A_1' \times B_1') \cdot \bar{M}, P_1' \times P_1'; S^D \times S^D)$, also gleich $\mu(A_1' \cdot B_1', P_1')$. —

Zum Beweis der ersten Behauptung müssen wir zeigen, daß es kein Paar von Punkten $Q_1 \times Q_2$ aus A und $R_1 \times R_2$ aus B geben kann, dessen Verbindungsgerade L trifft und daß bei der Spezialisierung von L in $\bar{L} \times S^N$ in das Punktepaar $P_1' \times P_2'$, $P_1' \times P_2'$ übergeht, natürlich außer diesem Paar selbst. — Zunächst ist klar, daß $Q_1 \times Q_2 \neq R_1 \times R_2$ sein muß; andernfalls wäre der Ort von $Q_1 \times Q_2$ über k enthalten in $A \cap B$, also wäre $P = P_1' \times P_2'$ nicht isoliert in $A \cap B$. Die daher eindeutig bestimmte Verbindungsgerade G von $Q_1 \times Q_2$ und $R_1 \times R_2$ kann nicht ganz in L liegen, weil dieser $(D + N - r - s - 1)$-dimensionale, allgemeine lineare Raum die r-dimensionale alg. Mf. A überhaupt nicht schneidet, also $Q_1 \times Q_2$ aus A nicht in L enthalten sein kann. Der Schnittpunkt der Geraden G mit L sei der Punkt $W_1 \times W_2$. Wir spezialisieren nun L aus in den linearen Raum $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$, wobei $\bar{\bar{L}}_{W_1}$ ein allgemeiner $(D - r - s - 1)$-dimensionaler linearer Raum durch den obigen Punkt W_1 im S^D sei. Hierbei bleibt das noch unspezialisierte Punktepaar $Q_1 \times Q_2$, $R_1 \times R_2$ erhalten, denn auch nach der Spezialisierung schneidet seine Verbindungsgerade G den $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$ im Punkte $W_1 \times W_2$. Die Spezialisierung von L in $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$ können wir nun, da $\bar{L}$ allgemeiner linearer Raum sein sollte, in folgenden beiden Schritten vornehmen: zuerst L in $\bar{L} \times S^N$ und dann $\bar{L} \times S^N$ in $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$. Würde bereits beim ersten Schritt das Paar $Q_1 \times Q_2$, $R_1 \times R_2$ übergehen in $P_1' \times P_2'$, $P_1' \times P_2'$, so auch bei der zusammengesetzten Spezialisierung, q. e. a.

§ 5.

Gegenbeispiele zum Assoziativgesetz.

Dieses Gesetz, s. F. VI$_2$, th. 5, besagt, daß die für drei alg. Mfn. A, B, C im S^N selbstverständlich richtige Punktmengengleichung $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ auch richtig ist, wenn man die Multiplizitäten berücksichtigt. Wenn der isolierte Schnittpunkt P von $A \cap B \cap C$ enthalten ist etwa in den Komponenten H_u von $A \cap B$ sowie in den Komponenten K_v von $B \cap C$, würde in unserm Falle das Assoziativgesetz für μ so lauten:

$$\sum_u \mu(A \cdot B, H_u) \cdot \mu(H_u \cdot C, P) = \sum_v \mu(A \cdot K_v, P) \cdot \mu(B \cdot C, K_v).$$

Nun haben wir zwar in dieser Abhandlung μ nur für Schnittpunkte und noch nicht für Schnittkomponenten höherer Dimension erklärt, aber zumindest wird man doch bei dieser Ausdehnung des Definitionsbereiches von μ verlangen, daß, ebenso wie in § 3, μ mit der Multiplizität i von Weil übereinstimmt, wenn es sich um die von Weil allein erfaßten eigentlichen Schnittkomponenten handelt, z. B. $\mu(A \cdot B, H_u) = i(A \cdot B, H_u; S^N)$, wenn $\dim H_u = \dim A + \dim B - N$ ist.

Im folgenden werden zwei Beispiele angegeben, in denen jeweils nur eine Komponente H bzw. K den Punkt P enthält und

$$(11) \qquad i(A \cdot B, H; S^N) \cdot \mu(H \cdot C, P) + \mu(A \cdot K, P) \cdot i(B \cdot C, K; S^N)$$

ist. Der bequemeren Rechnung wegen arbeiten wir dabei im affinen Raum R^3 bzw. R^4.

1. Beispiel. Im R^3 sei A der Zylinder $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ und B die Kugel $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 1$, die vom Zylinder A längs der Schnittkurve H mit den Gleichungen $x_3 = 0$, $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ berührt wird. C sei die Gerade $x_1 = x_3 = 0$, die die Kurve H nur in $P = (0, 0, 0)$ und in $(0, 2, 0)$ schneidet. Dann ist nach dem Kriterium F. VI$_2$, th. 6, für $i = 1$ die Schnittmultiplizität $i(A \cdot B, H; R^3) \geqq 2$, weil A und B in dem auf H liegenden Punkte $P = (0, 0, 0)$ nicht transversal sind; und nach dem Kriterium in Satz 5, § 4, ist $\mu(H \cdot C, P) = 1$, da die Gerade C nicht Tangente an H in $P = (0, 0, 0)$ ist. Also ist die linke Seite von (11) gleich $i(A \cdot B, H; R^3) \cdot \mu(H \cdot C, P) \geqq 2$.

Andererseits ist die Multiplizität $i(B \cdot C, P; R^3)$, mit der die Gerade C die Kugel B im Punkte $K = P$ schneidet, gleich 1, da C dort nicht in der Tangentialebene an B liegt, und ist $\mu(A \cdot K, P) = \mu(A \cdot P, P) = 1$ nach § 4, Satz 2, weil P einfacher Punkt des Zylinders A ist. Demnach ist die rechte Seite von (11) in diesem Beispiel gleich

$$\mu(A \cdot K, P) \cdot i(B \cdot C, K; R^3) = 1$$

und damit ungleich der linken.

2. Beispiel. Im R^4 sei die Fläche A der Schnitt eines Hyperzylinders mit einer Hyperebene, B sei eine Hyperkugel und C eine Ebene, nämlich

$$\text{A)} \quad \begin{matrix} x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad \text{B)} \quad x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$$\text{C)} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

A und B schneiden einander in der Kurve H mit den Gleichungen $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, und H und C schneiden sich in den Punkten $P = (0, 0, 0, 0)$ und $(0, 2, 0, 0)$. Hierbei ist $i(A \cdot B, H; R^4) \geqq 2$, da A und B in dem auf H liegenden Punkte $P = (0, 0, 0, 0)$ nicht transversal sind; der Durchschnitt ihrer Tangentialräume dort, $x_3 = x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, ist nämlich zweidimensional und nicht wie zur Transversalität erforderlich, eindimensional. Dagegen sind nach unserer Definition in § 4 H und C transversal in P, da die Tangente $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ an H die Ebene $x_1 = x_2 = 0$ nur in P schneidet, also ist $\mu(H \cdot C, P) = 1$ und damit in diesem Beispiel die linke Seite von (11) mindestens 2.

Andererseits schneiden einander B und C in der Kurve K mit den Gleichungen $(x_2 - 1)^2 + x_4^2 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$, und A und K schneiden

sich in den Punkten $P = (0, 0, 0, 0)$ und $(0, 2, 0, 0)$. Jetzt ist aber $i(B \cdot C, K; R') = 1$, denn in dem auf K liegenden Punkte P sind B und C transversal, der Durchschnitt ihrer Tangentialräume dort ist ja die Gerade $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. — Die Fläche A und die Kurve K sind transversal in P, weil ihre Tangentialräume dort, nämlich $x_2 = x_4 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, einander nur in P schneiden. Also ist $\mu(A \cdot K, P) = 1$. Daraus folgt, zusammen mit dem oben Bewiesenen, daß die rechte Seite von (11) gleich 1, also wieder ungleich der linken ist. —

Das Assoziativgesetz erleidet also Ausnahmen, die jedoch, wie § 3, Satz 1, und F. VI$_2$, th. 5, *zeigen, nicht auftreten, wenn man sich auf eigentliche Schnittkomponenten beschränkt, da dann unsere Multiplizitätsdefinition in die von* Weil *übergeht.*

(Eingegangen am 1. August 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 2, S. 216–252 (1952).

Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter.

Von

Martin Eichler in Münster.

Einleitung.

1. E. WITT hat angeregt, die Theorie der quadratischen Formen auf geometrischen Grundbegriffen aufzubauen. Eine quadratische Form

$$F = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} f_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \qquad (f_{\mu\nu} = f_{\nu\mu})$$

definiert in dem n-dimensionalen Vektorraum R zwischen zwei Vektoren $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, $\eta = (y_1, \ldots, y_n)$ ein skalares Produkt

$$\xi\eta = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} f_{\mu\nu} x_\mu y_\nu .$$

Dadurch wird R zu einem metrischen Raum über demjenigen Körper k, dem die Koeffizienten $f_{\mu\nu}$ von F sowie die Vektorkomponenten x_ν, y_ν angehören. In einem demnächst erscheinenden Lehrbuch der Theorie der quadratischen Formen [1]) habe ich diese Anregung konsequent durchgeführt. Besonders der in den drei ersten Kapiteln dargestellte elementare Teil der Theorie wird im Folgenden als bekannt vorausgesetzt, und die dort gebrauchten Bezeichnungsnormen sollen auch hier maßgeblich sein. Gleichwohl wiederholen wir einige in diesem Zusammenhang wichtige Grundgedanken ganz kurz.

Hier wird der Grundkörper k des metrischen Raumes R ein algebraischer Zahlkörper sein. Die Frage, die uns beschäftigt, ist die nach der Ähnlichkeit zweier Gitter (bezügl. der Ordnung $\mathfrak{o}$ aller ganzen Zahlen von k) $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$: gibt es eine eigentliche [2]) Ähnlichkeitstransformation Σ derart, daß

$$\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{J} \tag{1}$$

gilt? Stehen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ in dieser Beziehung, so heißen sie ähnlich. Die Gesamtheiten ähnlicher Gitter heißen Ähnlichkeitsklassen. Wenn es eine Ähnlichkeitstransformation Σ so gibt, daß an Stelle von (1)

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cong \Sigma\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle Primideale } \mathfrak{p} \tag{2}$$

[1]) *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg. Es wird im Folgenden zitiert mit QFOG.

[2]) Definition s. QFOG. § 4, Nr. 3. Den Zusatz „eigentlich" wollen wir im Folgenden i. a. als selbstverständlich ansehen.

gilt, so nennt man $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ verwandt; die Gesamtheiten verwandter Gitter sind die Geschlechter. Diese umfassen stets volle Änlichkeitsklassen. Man kann (2) auch so formulieren: für jedes $\mathfrak{p}$ gibt es einen eigentlichen Automorphismus $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$ so, daß

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \Sigma\, \mathsf{T}_\mathfrak{p}\, \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \tag{3}$$

gilt. $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ ist durch (3) nur bis auf eine automorphe Einheit $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ als rechtsseitigen Faktor festgelegt. Gibt es ein Σ, für welches die Gleichungen (3) erfüllbar sind, und hierzu einen Automorphismus T von R sowie für jedes $\mathfrak{p}$ eine automorphe Einheit $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, so daß für die Spinor-Normen[3]) die Gleichungen

$$t(\mathsf{T}) = t(\mathsf{T}_\mathfrak{p})\, t(\mathsf{E}_\mathfrak{p}) \qquad \text{für alle } \mathfrak{p} \tag{4}$$

bestehen, so nennt man $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ Spinor-verwandt[4]). Die Gesamtheiten Spinor-verwandter Gitter sind die Spinor-Geschlechter. Diese stehen zwischen den Geschlechtern und den Ähnlichkeitsklassen in dem Sinne, daß ein Spinor-Geschlecht aus vollen Ähnlichkeitsklassen und ein Geschlecht aus vollen Spinor-Geschlechtern besteht.

Wenn R ein isotroper Raum ist oder mit anderen Worten, wenn seine metrische Fundamentalform F die Zahl 0 nicht-trivial darstellt, so fallen die Spinor-Geschlechter mit den Ähnlichkeitsklassen zusammen[5]). Da bekanntlich jede indefinite quadratische Form mit mehr als 4 Variablen im rationalen Zahlkörper die Null nicht-trivial darstellt, kann man diesen Satz als eine Verallgemeinerung des Meyerschen Satzes über die Äquivalenz indefiniter quadratischer Formen ansehen, sofern die Variablenzahl $n > 4$ ist. Meyers Satz gilt aber auch für 3 und 4 Variable. Wir stellen uns hier die Aufgabe, ihn für 3- und 4-dimensionale Räume erneut zu begründen.

Dabei ist nun eine Verallgemeinerung möglich. Ein Gitter ist erklärt als ein endlicher Modul größtmöglichen Ranges bezügl. einer Ordnung $\mathfrak{o}$ in k, deren Elemente man als ganz bezeichnet. Diese Ordnung $\mathfrak{o}$ braucht nicht die Ordnung aller im geläufigen Sinne ganzen Zahlen zu sein, vielmehr kann man für $\mathfrak{o}$ die Gesamtheit aller Zahlen aus k nehmen, deren Nenner Potenzprodukte von Primidealen einer vorgeschriebenen Menge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ sind. Die Analogie zwischen den algebraischen Zahlen und Funktionen legt es nahe, diese Primideale als unendliche Primdivisoren von k zu bezeichnen. Unendliche Primdivisoren pflegt man ferner den archimedischen Bewertungen von k zuzuordnen. Die Ordnung $\mathfrak{o}$ läßt sich nun beschreiben durch die Aufzählung aller Primdivisoren von k, welche man als unendlich bezeichnen will. Von der Auszeichnung der unendlichen Primdivisoren von k

[3]) QFOG, § 4, Nr. 2. Vgl. auch unten, § 1.
[4]) QFOG, § 13, Nr. 4.
[5]) QFOG, Satz 15.1.

hängen dann auch die Gitter in R ab. Wir sagen nun: Ein Gitter $\mathfrak{J}$ in R heißt *arithmetisch indefinit*, wenn es mindestens einen unendlichen Primdivisor ∞ von k gibt, für welchen R, d. h. genau genommen der Raum $R_\infty = Rk_\infty$, über der bezügl. der zugehörigen Bewertung perfekten Hülle k_∞ von k isotrop wird. Kurz: die Gleichung

$$F = \sum f_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0$$

soll in k_∞ eine nicht-triviale Lösung besitzen.

Arithmetisch indefinite Gitter haben zahlreiche Eigenschaften gemeinsam mit den Gittern in *indefiniten Räumen* im gewöhnlichen Sinne, unter denen sie offenbar enthalten sind (d. h. die metrische Fundamentalform F von R soll indefinit sein). Z. B. haben die Gruppen der automorphen Einheiten von Gittern (bis auf eine triviale Ausnahme) dann und nur dann unendliche Ordnungen, wenn es sich um arithmetisch indefinite Gitter handelt[6]).

Wir werden im ersten Teile der vorliegenden Arbeit voraussetzen, *daß* $\mathfrak{o}$ *eine solchermaßen erweiterte Ordnung in* k *ist*, für welche also nicht nur die archimedischen Primdivisoren als unendlich zu gelten brauchen. Es gilt dann

Satz 1. *Zwei arithmetisch indefinite und Spinor-verwandte Gitter* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{K}$ *sind ähnlich, sofern die Dimension des Raumes* R $n = 3$ *oder* 4 *ist.*

Ist k der rationale Zahlkörper, so besitzen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ bezügl. $\mathfrak{o}$ Basen $[\iota_\nu]$ und $[\varkappa_\nu]$. Setzt man noch voraus, daß die Normen von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ übereinstimmen, so muß die Norm einer (3) leistenden Ähnlichkeitstransformation Σ eine Einheit s von $\mathfrak{o}$ sein. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 sind dann die quadratischen Formen

$$\frac{s}{2}\left(\sum_\nu \iota_\nu x_\nu\right)^2, \quad \frac{1}{2}\left(\sum_\nu \varkappa_\nu y_\nu\right)^2$$

äquivalent. Es ist lehrreich, Satz 1 auf nicht äquivalente definite Formen anzuwenden, welche man durch Zulassung von Nennern „arithmetisch indefinit" gemacht hat.

Ist $\mathfrak{o}$ die hauptsächlich interessierende Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen, so gibt es nur die Einheiten $s = \pm 1$; im Falle $n = 3$ ist sogar nur $s = 1$ möglich. Satz 1 enthält also ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für die Äquivalenz indefiniter ternärer quadratischer Formen. Ein solches ist implizite in Meyers Bestimmung der Klassenzahl solcher Formen in einem Geschlecht enthalten. Die Klassenzahl ist nach Satz 1 gleich der Anzahl der Spinor-Geschlechter. Wir verzichten auf ihre i. a. mühsame Bestimmung, obwohl sie mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar wäre. Von diesem einen Punkt abgesehen stimmt Satz 1 in dem genannten Spezialfall mit dem Meyerschen Satze überein.

---

[6]) QFOG, Satz 16. 1.

Zieht man noch das oben erwähnte Ergebnis über Gitter in isotropen Räumen hinzu, so ist mit Satz 1 ein Ergebnis erreicht, welches MEYERS Satz auf beliebige Variablenzahl $n > 2$ überträgt:

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{o}$ *die Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen, so sind zwei Spinor-verwandte Gitter* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{K}$ *bezügl.* $\mathfrak{o}$ *in einem indefiniten Raum* R *über dem rationalen Zahlkörper* k *der Dimension* $n > 2$ *ähnlich.*

2. MEYERS eigene Übertragung seines Satzes auf größere Variablenzahl geht von einschränkenden Voraussetzungen über die Ordnungsinvarianten der Formen bzw. Gitter aus[7]). Diese haben zur Folge, daß es nur ein Spinor-Geschlecht in einem Geschlecht gibt. Etwas andere Voraussetzungen macht der folgende Satz, den wir zugleich mit Satz 1 beweisen wollen:

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 über* $\mathfrak{o}$, k *und* R *sind zwei arithmetisch indefinite maximale Gitter desselben Geschlechts in* R *ähnlich.*

Im Falle $n = 3$ *muß außerdem vorausgesetzt werden, daß die reduzierten Determinanten der Gitter durch keine andere Quadratzahl als 4 und nicht durch 8 teilbar sind*[8]).

Es genügt auch jetzt, den Beweis in den Fällen $n = 3$ und 4 zu führen, da er für $n > 4$ bereits in meinem Buch gebracht wurde[9]).

Vermutlich gelten die Sätze 2 und 3 für alle im obigen Sinne erweiterten Ordnungen und für beliebige algebraische Zahlkörper. Unsere Beweise in den bisher erledigten Spezialfällen machen wesentlichen Gebrauch von gewissen Parameterdarstellungen der orthogonalen Gruppen, die nur in diesen Fällen gültig sind.

3. Der zweite Teil der vorliegenden Arbeit geht auf SIEGELS letztes mittels analytischer Methoden bewiesenes Resultat über indefinite quadratische Formen ein[10]). Es läßt sich kurz, wenn auch sehr ungenau etwa so formulieren: die Zetafunktionen zweier verwandter indefiniter Formen sind identisch. Die exakte Formulierung folgt unten.

Wie sich sogleich zeigen wird, handelt es sich um eine Aussage, die im Gegensatz zu den meisten Ergebnissen der analytischen Zahlentheorie zu ihrer Formulierung keinerlei Begriffe der Analysis bedarf, wie etwa der Grenzwert einer unendlichen Folge oder das Volumen einer Punktmenge. Ihrer rein arithmetischen Formulierbarkeit entsprechend läßt sich auch ihr Beweis ohne Zuhilfenahme der Analysis führen. Wir können bei dieser Gelegenheit erneut beobachten, daß die

[7]) Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich **36** (1891), S. 241—250. — Noch einschneidendere Voraussetzungen macht eine Schlußweise von M. EICHLER, Comment. Math. Helvetici **21** (1948), S. 1—28.

[8]) D. h. für $n = 3$ müssen die zu den Gittern gehörigen Formen Stammformen in der Terminologie von H. BRANDT sein.

[9]) QFOG, Satz 15.2.

[10]) Annals of Maths. **45** (1944), S. 577—622; Math. Annalen **124** (1951), S. 17—54. Siehe auch H. MAASS, Sitzgsber. Heidelberger Akad. Wiss. 1949, S. 1—42.

arithmetischen Methoden oftmals schwerfälliger sind als die analytischen; sie erfordern zunächst den Aufbau eines gehörigen Apparats von Begriffen. Allerdings leisten sie dann bisweilen auch gründlichere Arbeit, indem sie noch weitere Erkenntnisse vermitteln, die das Gesamtbild in befriedigender Weise abrunden.

Wenngleich es möglich wäre, das Problem in großer Allgemeinheit anzugreifen, so scheint es doch ratsam, folgende Einschränkungen zu machen: *k ist der rationale Zahlkörper und* o *die Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen.*

Zur Formulierung des zu beweisenden Satzes sind einige Vorbereitungen erforderlich. Ein Gitter $\mathfrak{J}$ sei vorgelegt: $\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}}^{+}$ bezeichne die Gruppe aller eigentlichen automorphen Einheiten von $\mathfrak{J}$. Man kann ihr in ganz elementarer Weise ein *relatives Maß* $u^{+}(\mathfrak{J})$ zuordnen[11]). Auf der anderen Seite hat Siegel gezeigt, daß die Gruppe $\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}}^{+}$ als eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Abbildungen eines gewissen Raumes auf sich dargestellt werden kann; es existiert ein Diskontinuitätsbereich, und der reziproke Wert seines Volumens heißt das *absolute Maß* $U^{+}(\mathfrak{J})$. Die relativen und absoluten Maße stimmen bis auf einen willkürlichen für alle Gitter von R gleichen Faktor überein[12]).

Als ein Parallelotop[13]) in R bezeichnen wir ein System $\mathfrak{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$ von Vektoren in R, welche als linear unabhängig vorausgesetzt werden; r ist seine Dimension. $\mathfrak{T}$ heiße halbeinfach, wenn die Determinante $|\tau_\varrho \tau_\sigma|$ nicht verschwindet. Zwei Parallelotope $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}} = \{\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_r\}$ heißen isomorph, wenn $\tau_\varrho \tau_\sigma = \overline{\tau}_\varrho \overline{\tau}_\sigma$ gilt. Es gibt stets einen eigentlichen oder uneigentlichen Automorphismus T von R, welcher $\overline{\mathfrak{T}} = \mathsf{T}\mathfrak{T}$ oder ausführlicher $\overline{\tau}_\varrho = \mathsf{T}\tau_\varrho$ leistet[14]). Gibt es eine eigentliche automorphe Einheit E eines Gitters $\mathfrak{J}$, für welche $\overline{\mathfrak{T}} = \mathsf{E}\mathfrak{T}$ gilt, so heißen $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ bezügl. $\mathfrak{J}$ assoziiert. Die Anzahl der Klassen bezügl. $\mathfrak{J}$ assoziierter Parallelotope $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{J}$, welche mit einem vorgegebenen halbeinfachen Parallelotop $\mathfrak{T}_0$ in R isomorph sind, ist endlich[15]).

Die Untergruppe derjenigen eigentlichen automorphen Einheiten E von $\mathfrak{J}$, für welche $\mathsf{E}\tau_\varrho = \tau_\varrho$ für $\varrho = 1, \ldots, r$ gilt, werde mit $\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}}^{+}[\mathfrak{T}]$ bezeichnet. Auch für diese Gruppen lassen sich sowohl relative wie absolute Maße[11]), [12]) definieren, welche wieder einander proportional sind. Sie werden mit $u^{+}[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}]$, $U^{+}[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}]$ bezeichnet; es sind Invarianten der Klassen assoziierter Parallelotope.

Ein halbeinfaches Parallelotop $\mathfrak{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$ in R spannt einen halbeinfachen Teilraum

$$T = k(\tau_1, \ldots, \tau_r) = k(\mathfrak{T})$$

---

[11]) QFOG, § 16, s. a. hier § 5.

[12]) QFOG, Satz 33. 4.

[13]) QFOG, § 24, Nr. 1.

[14]) QFOG, Satz 1. 4. Wir brauchen diesen Satz nur für halbeinfache Parallelotope.

[15]) QFOG, Satz 24. 1.

von R auf. Der zu T senkrechte Teilraum T' von R ist ebenfalls halbeinfach, und seine Struktur ist nach WITT durch die von R und T eindeutig festgelegt, d. h. sie ist unabhängig davon, ob man $\mathfrak{T}$ durch ein anderes mit $\mathfrak{T}$ isomorphes Parallelotop ersetzt[16]).

Das letzte Ziel der vorliegenden Arbeit ist

Satz 4. *$\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ seien zwei Gitter in R, und es gelte für sie*

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cong \overline{\mathfrak{J}}_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

$\mathfrak{T}$ sei ein halbeinfaches r-dimensionales Parallelotop in R, und der soeben erklärte Teilraum T' von R (d. h. seine metrische Fundamentalform) sei indefinit. Ferner sei die Dimension $n-r$ von T' größer als 2 oder mit anderen Worten $r < n-2$.

Dann enthalten $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$ gleich viele Klassen assoziierter mit $\mathfrak{T}$ isomorpher Parallelotope, sie seien etwa repräsentiert durch $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_f$ und $\overline{\mathfrak{T}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{T}}_f$. Dabei gilt

$$u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_\varphi] = u^+[\overline{\mathfrak{J}}, \overline{\mathfrak{T}}_\varphi], \qquad \varphi = 1, \ldots, f. \tag{5}$$

Ferner gilt

$$u^+(\mathfrak{J}) = u^+(\overline{\mathfrak{J}}). \tag{6}$$

SIEGELS Satz sagt lediglich etwas über die Summen

$$S(\mathfrak{J}, \mathfrak{T}) = \sum_{\varphi=1}^{f} \frac{1}{u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_\varphi]} \tag{7}$$

(und gewisse Teilsummen davon) aus, und zwar gilt

$$S(\mathfrak{J}, \mathfrak{T}) = S(\overline{\mathfrak{J}}, \mathfrak{T}). \tag{8}$$

Die Voraussetzungen von SIEGEL sind allerdings etwas von den hier gemachten verschieden; einerseits sind sie enger, denn es wird $r < \frac{n-2}{2}$ verlangt; andererseits sind sie weiter, indem die Indefinitheit von T' nicht benutzt wird. Für unsere schärfere Aussage scheint die Indefinitheit von T' wesentlich zu sein. Wegen der Proportionalität zwischen den relativen und den absoluten Maßen bedeutet es keinen Unterschied, ob (5) und (6) für die ersteren oder die letzteren behauptet wird. Unmittelbar arithmetisch zugänglich sind die relativen Maße, analytisch zugänglich dagegen die absoluten.

Unser Beweis von Satz 4 stützt sich unter anderem auf ein Kriterium für die Assoziiertheit zweier Parallelotope, welches dem in Satz 2 gegebenen Kriterium für die Ähnlichkeit zweier Gitter nachgebildet ist und auch im gleichen Zuge bewiesen werden kann (Satz 9 in § 7). Größere Mühe macht der Nachweis der Formeln (5) und (6), und ein einfacherer Zugang, etwa durch geschickte Kombination elementarer und analytischer Schlußweisen, ist zu wünschen.

[16]) QFOG, Satz 2.2.

§ 1.

Metrische Räume der Dimensionen $n = 3$ und 4 und ihre Cliffordschen Algebren.

1. Der Beweis der Sätze 1 und 3 gründet sich auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen einem metrischen Raum und einem ihm zugeordneten hyperkomplexen System C, der sogenannten zweiten CLIFFORDschen Algebra. Er wurde im Falle der Dimension $n = 3$ durch H. BRANDT[17]) für die Arithmetik der Formen nutzbar gemacht. Man ordnet den Systemen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ von $r \geqq 0$ Vektoren aus R Klammersymbole $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ zu. Diese erzeugen eine Algebra über k, welche durch die folgenden Relationen definiert wird:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)(\beta_1, \ldots, \beta_s) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s),$$
$$(\alpha, \beta) + (\alpha, \beta) = \alpha\beta( ).$$

Das leere Klammersymbol ( ) spielt die Rolle des Einselements und wird mit der Eins 1 von k identifiziert. Man erhält so die erste CLIFFORDsche Algebra. Die zweite wird erzeugt durch alle Klammersymbole von geraden Anzahlen von Vektoren. Die Ränge sind 2^n und 2^{n-1}. Wir haben es im Folgenden ausschließlich mit der zweiten CLIFFORDschen Algebra zu tun, sie wird mit C bezeichnet[18]).

Ist (ι_ν) eine Orthogonalbasis von R, so sind

$$\begin{aligned} &1, I_1 = (\iota_2, \iota_3), I_2 = (\iota_3, \iota_1), I_3 = (\iota_1, \iota_2) && \text{für } n = 3 \\ &1, I_1 = (\iota_2, \iota_3), I_2 = (\iota_3, \iota_1), I_3 = (\iota_1, \iota_2) \\ &J = (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4), JI_1, JI_2, JI_3 && \text{für } n = 4 \end{aligned}$$

Basen von C. Im ersten Falle ist C eine Quaternionen-Algebra mit den Multiplikationsregeln

$$I_1^2 = -\tfrac{1}{4}\iota_2^2\iota_3^2, \ldots, I_1 I_2 = -I_2 I_1 = -\tfrac{1}{2}\iota_3^2 I_3, \ldots,$$

im anderen ist C eine Quaternionen-Algebra mit denselben Multiplikationsregeln über dem kommutativen hyperkomplexen System $Z = k(J)$ als Zentrum, wobei die Quadratklasse

$$J^2 = \tfrac{1}{16}\iota_1^2\iota_2^2\iota_3^2\iota_4^2 = \Delta(R)$$

die Diskriminante von R ist. Je nachdem ob $\Delta(R)$ ein Quadrat in k ist oder nicht, ist Z eine direkte Summe zweier mit k isomorpher Körper oder eine quadratische Körpererweiterung von k.

2. Die Automorphismen T von R lassen sich zu Automorphismen von C machen durch die Festsetzung

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r})^{\mathsf{T}} = (\mathsf{T}^{-1}\alpha_1, \ldots, \mathsf{T}^{-1}\alpha_{2r}). \tag{9}$$

---

[17]) Jahresber. Deutsche Math.-Verein. **53** (1943), S. 23—57.

[18]) Für das Folgende s. QFOG, § 4 und § 5.

Zu jedem eigentlichen T gibt es in C ein Element $T(\mathsf{T})$, welches bis auf einen Faktor aus k durch T eindeutig festgelegt wird, so daß

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r})^{\mathsf{T}} = T(\mathsf{T})^{-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r})\, T(\mathsf{T}) \tag{10}$$

gilt. Durch (10) wird die Gruppe $\mathfrak{D}^+$ der eigentlichen Automorphismen von R in die Gruppe der inneren Automorphismen von C treu abgebildet. Die Norm von $T(\mathsf{T}) = T_0 + T_1 I_1 + T_2 I_2 + T_3 I_3$ (T_ν in Z), als das Produkt von $T(\mathsf{T})$ mit dem konjugierten Quaternion $\overline{T}(\mathsf{T}) = T_0 - T_1 I_1 - T_2 I_2 - T_3 I_3$ in der üblichen Weise definiert, d. h.

$$t(T(\mathsf{T})) = T(\mathsf{T})\,\overline{T}(\mathsf{T}) = T_0^2 - T_1^2 I_1^2 - T_2^2 I_2^2 - T_3^2 I_3^2$$

legt gleichzeitig die Spinor-Norm von T fest, welche mit $t(\mathsf{T})$ bezeichnet wird. Wenn man beachtet, daß $T(\mathsf{T})$ nur bis auf einen Faktor in k festliegt, so muß man $t(\mathsf{T})$ als eine Quadratklasse in k verstehen.

Ist T ein beliebiges Element in C, für welches $T\overline{T} = t(T) \neq 0$ in k gelegen ist, so gibt es einen eigentlichen Automorphismus T von R so, daß $T = T(\mathsf{T})$ ist. Im Falle $n = 3$ liegt $t(T)$ stets in k, im Falle $n = 4$ dagegen nicht immer.

Für $n = 3$ erhält man alle Änlichkeitstransformationen Σ in der Gestalt $\Sigma = s\mathsf{T}$, $s \neq 0$, wo T ein Automorphismus ist. Jetzt wird zwischen eigentlichen und uneigentlichen Ähnlichkeitstransformationen nicht unterschieden, obwohl ein Unterschied besteht zwischen eigentlichen und uneigentlichen Automorphismen.

Für $n = 4$ gibt es auch noch Ähnlichkeitstransformationen von weniger trivialer Bauart. Ein Teil von ihnen wird definiert durch

$$n(\Sigma)^r\,(\Sigma^{-1}\alpha_1, \ldots, \Sigma^{-1}\alpha_{2r}) = S^{-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r})\, S,$$

wobei S ein beliebiges nicht singuläres Element von C ist. Diese Ähnlichkeitstransformationen Σ sowie die daraus gebildeten $s\Sigma$, $s \neq 0$, heißen eigentlich. Alle übrigen Ähnlichkeitstransformationen heißen uneigentlich, sie sind Produkte von eigentlichen mit einem beliebigen uneigentlichen Automorphismus T von R.

3. Man bekommt in diesem Zusammenhang eine Übersicht über sämtliche Quadratklassen in k, welche als Spinor-Normen eigentlicher Automorphismen auftreten können. Dies wird sich später als bedeutungsvoll herausstellen. Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und Q eine Quaternionen-Algebra über k. Wir nennen einen (endlichen oder unendlichen) Primdivisor $\mathfrak{p}$ von k *für Q charakteristisch*, wenn die $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung $Q_\mathfrak{p}$ von Q über $k_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist. Bekanntlich wird Q durch die charakteristischen Primdivisoren eindeutig gekennzeichnet; es gibt deren nur endlich viele, und ihre Anzahl ist gerade. Diejenigen für Q charakteristischen $\mathfrak{p}$, welche zu reellen archimedischen Bewertungen von k gehören, seien $\mathfrak{p} = \infty_1, \ldots, \infty_r$. Eine Zahl t in k, welche in jedem der Erweiterungskörper $k_{\infty_1}, \ldots, k_{\infty_r}$ ein Quadrat ist, tritt bekanntlich als Norm eines Elements aus Q auf,

und auch nur ein solches t. Ferner nennen wir einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von k *für den Raum* R *charakteristisch*, wenn $R_\mathfrak{p}$ anisotrop ist.

Es sei zunächst $n = 3$. Die Normenform von C ist

$$x_0^2 + \tfrac{1}{4}\iota_2^2\iota_3^2 x_1^2 + \tfrac{1}{4}\iota_3^2\iota_1^2 x_2^2 + \tfrac{1}{4}\iota_1^2\iota_2^2 x_3^2. \tag{11}$$

Sie stellt die 0 bekanntlich dann und nur dann nicht-trivial dar, wenn das gleiche für die Form

$$\frac{1}{4}\iota_2^2\iota_3^2 x_1^2 + \frac{1}{4}\iota_3^2\iota_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4}\iota_1^2\iota_2^2 x_3^2 = \frac{\iota_1^2\iota_2^2\iota_3^2}{4}\left(\iota_1^2\left(\frac{x_1}{\iota_1^2}\right)^2 + \iota_2^2\left(\frac{x_2}{\iota_2^2}\right)^2 + \iota_3^2\left(\frac{x_3}{\iota_3^2}\right)^2\right)$$

zutrifft. Daraus folgt: Ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ von k ist für C dann und nur dann charakteristisch, wenn $\mathfrak{p}$ *für* R *charakteristisch* ist.

Jetzt sei $n = 4$ und $\Delta(R)$ die Einheitsquadratklasse. C ist nach Nr. 1 die direkte Summe zweier isomorpher Quaternionen-Algebren über k. Ihre Normenformen sind wieder (11), wie oben ist ein $\mathfrak{p}$ für die direkten Summanden von C dann und nur dann charakteristisch, wenn $\mathfrak{p}$ für R charakteristisch ist, nämlich (11) läßt sich in k in $\iota_1^2\iota_2^2\iota_3^2(\iota_1^2 x_1^2 + \cdots + \iota_4^2 x_4^2)$ transformieren. In beiden Fällen gilt

Satz 5. *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Zahl* t *in* k *die Norm eines Quaternions aus* C *ist (bzw. ihre Quadratklasse die Spinor-Norm eines eigentlichen Automorphismus* T *von* R*), ist* $t > 0$ *in* k_∞ *für alle „reellen" für* R *charakteristischen Primdivisoren* ∞ *von* k.

Dieser Satz gilt aber auch für $n = 4$, wenn $\Delta(R)$ nicht die Einheitsquadratklasse ist. Jetzt ist C eine Quaternionen-Algebra über der quadratischen Erweiterung $Z = k(\sqrt{\Delta(R)})$. Da die Normenform von C immer noch (11) ist, bleibt C ungeändert, wenn man den nicht identischen Automorphismus $\sqrt{\Delta(R)} \to -\sqrt{\Delta(R)}$ von Z anwendet. Dies hat zur Folge, daß mit einem Primdivisor $\mathfrak{P}$ von Z auch der konjugierte $\overline{\mathfrak{P}}$ für C gleichzeitig charakteristisch ist bzw. nicht. Es sei ∞ ein „reeller" Primdivisor von k, für welchen R_∞ anisotrop ist. Dann ist $\Delta(R) > 0$ in k_∞, also ∞ zerfällt in Z in zwei verschiedene „reelle" Primdivisoren ∞_Z, $\overline{\infty}_Z$, und beide sind für C charakteristisch. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Zahl t aus k die Norm eines Quaternions aus C ist, ist $t > 0$ in Z_{∞_Z} für alle für C charakteristischen „reellen" Primdivisoren ∞_Z von Z. Sie ist wegen $Z_{\infty_Z} = k_\infty$ mit $t > 0$ in k_∞ für alle die „reellen" Primdivisoren ∞ von k äquivalent, für welche R anisotrop ist. Das war zu beweisen.

Der folgende Zusatz kann noch gemacht werden:

Zusatz. *Im Falle* $n = 4$ *ist ein Element* t *aus* Z *dann und nur dann Norm eines Elements aus* C, *wenn* $t > 0$ *in* Z_{∞_Z} *(sofern* Z *ein Körper ist; es ist dann* $Z_{\infty_Z} = k_{\infty_Z}(\sqrt{\Delta(R)}) = k_\infty$*) oder wenn beide direkten Summanden von* t *positiv sind (sofern* Z *eine direkte Summe zweier mit* k *isomorpher Körper ist), und zwar für jeden „reellen" Primdivisor* ∞ *von* k *bzw.* ∞_Z *von* Z, *für welchen* R_∞ *bzw.* R_{∞_Z} *anisotrop ist.*

4. Die Definition von C durch die Klammersymbole zeigt unmittelbar: Es sei $\mathfrak{J}$ ein Gitter in R, seine Norm sei

$$n(\mathfrak{J}) = \mathfrak{a},$$

es ist ein Ideal für die der Definition von $\mathfrak{J}$ zu Grunde liegende Ordnung $\mathfrak{o}$ von k. Die Gesamtheit der Klammersymbole

$$a(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r}) \quad \text{mit } a \in \mathfrak{a}^{-r},\ \alpha_\varrho \in \mathfrak{J}$$

erzeugt eine Ordnung $\mathfrak{O}_\mathfrak{J}$ in C. $\mathfrak{O}_\mathfrak{J}$ ist von $\mathfrak{o}$ „ganz abhängig". Für diese Ordnung gelten die folgenden Sätze [19]): Ist für zwei Gitter $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{K} = \mathfrak{O}_\mathfrak{J}, \tag{12}$$

so gibt es ein Ideal $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{o}$, so daß

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{m}\mathfrak{J} \tag{13}$$

gilt, und umgekehrt. Ist T ein eigentlicher Automorphismus von R und $T(\mathsf{T})$ das ihm gemäß Nr. 2 zugeordnete Element in C, so ist

$$\mathfrak{O}_{\mathsf{T}\mathfrak{J}} = T(\mathsf{T})^{-1}\mathfrak{O}_\mathfrak{J} T(\mathsf{T}). \tag{14}$$

Dasselbe trifft im Falle $n = 4$ zu, wenn Σ eine eigentliche Ähnlichkeitstransformation ist und $T(\mathsf{T})$ in (14) ersetzt wird durch das Σ darstellende Element $S = S(\Sigma)$ in C.

§ 2.

Neue Formulierung der Sätze 1 und 3.

1. Nach diesen Vorbereitungen können die Sätze 1 und 3 (für $n = 3$ oder 4) als Aussagen über Ordnungen in C formuliert werden. Sollen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ als ähnlich nachgewiesen werden, so dürfen wir zunächst einmal $\mathfrak{K}$ durch $\Sigma^{-1}\mathfrak{K}$ ersetzen, wo Σ die in (3) auftretende Ähnlichkeitstransformation ist. Es gilt dann also

$$\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle Primideale } \mathfrak{p} \tag{15}$$

mit eigentlichen Automorphismen $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$. Sind $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ Spinorverwandt, so gibt es einen Automorphismus T von R sowie für jedes $\mathfrak{p}$ eine automorphe Einheit $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ derart, daß

$$t(\mathsf{T}) = t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathsf{E}_\mathfrak{p})$$

gilt. Ersetzt man noch $\mathfrak{K}$ durch $\mathsf{T}^{-1}\mathfrak{K}$, so darf man hier $\mathsf{T} = 1$, also $t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathsf{E}_\mathfrak{p}) = 1$ annehmen. Man darf ferner $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ an Stelle von $\mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ schreiben und hat dann

$$t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}) = 1 \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}. \tag{16}$$

[19]) QFOG, § 14, Nr. 2.

Die $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ gemäß § 1, Nr. 4 zugeordneten Ordnungen in C seien

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{J}}, \quad \mathfrak{O}' = \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}.$$

Für die $\mathsf{T}_{\mathfrak{p}}$ darstellenden Elemente $T_{\mathfrak{p}} = T(\mathsf{T}_{\mathfrak{p}})$ bestehen wegen (14) und (15) die Gleichungen

$$\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}}^{-1} \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}}. \tag{17}$$

Die zunächst nur bis auf Faktoren in $k_{\mathfrak{p}}$ fest liegenden $T_{\mathfrak{p}}$ kann man wegen (16) so normieren, daß ihre Normen

$$t(T_{\mathfrak{p}}) = 1 \qquad \text{für alle } \mathfrak{p} \tag{18}$$

sind.

Bis auf endlich viele Ausnahmen sind die $\mathsf{T}_{\mathfrak{p}}$ Einheiten von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, also die Ideale

$$\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$$

sind zweiseitig. Schließt man noch die Primteiler $\mathfrak{p}$ der Diskriminante von $\mathfrak{O}$ aus, so sind deshalb die $T_{\mathfrak{p}}$ Produkte von Einheiten $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ mit Elementen $z_{\mathfrak{p}}$ aus dem Zentrum von $C_{\mathfrak{p}}$. Da die Normen von Einheiten von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ Einheiten im Zentrum sind, folgt aus (18), daß auch die $z_{\mathfrak{p}}$ bis auf endlich viele Ausnahmen Einheiten sind, d. h. endlich: bis auf endlich viele Ausnahmen sind die $T_{\mathfrak{p}}$ Einheiten von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$.

Aus diesem Grunde existiert der Durchschnitt

$$\mathfrak{M} = C \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1} T_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_2} T_{\mathfrak{p}_2} \cap \ldots \tag{19}$$

($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ bedeuten alle Primideale für $\mathfrak{o}$ in irgend einer Reihenfolge) und stellt ein Linksideal für $\mathfrak{O}$ dar. Die Rechtsordnung von $\mathfrak{M}$ ist

$$C \cap T_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1} T_{\mathfrak{p}_1} \cap T_{\mathfrak{p}_2}^{-1} \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_2} T_{\mathfrak{p}_2} \cap \ldots,$$

und das ist die Ordnung $\mathfrak{O}'$ zufolge (17). $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ sind i. a. keine maximalen Ordnungen, wir machen hier aber auch gar nicht von einer allgemeinen Idealtheorie für nicht maximale Ordnungen Gebrauch. An dieser Stelle kommt es lediglich auf die Feststellung an, daß $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ die Links- und Rechtsordnungen von $\mathfrak{M}$ sind. Man braucht ferner den Begriff der Norm bezügl. des Zentrums Z. Sie wird ein Ideal für die Ordnung

$$\mathfrak{z} = \mathrm{Z} \cap \mathfrak{O} = \mathrm{Z} \cap \mathfrak{O}', \tag{20}$$

welche ebensowenig wie $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ maximal zu sein braucht. Die Norm von $\mathfrak{M}$ wird definiert durch

$$t(\mathfrak{M}) = \mathrm{Z} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1} t(T_{\mathfrak{p}_1}) \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_2} t(T_{\mathfrak{p}_2}) \cap \ldots$$

und fällt wegen (18) gleich

$$t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{z} \tag{21}$$

aus.

Der Beweis des Satzes 1 besteht in dem Nachweis, daß $\mathfrak{M}$ *ein Hauptideal*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{O}M \tag{22}$$

ist. Nach § 1, Nr. 2 definiert M eine (eigentliche) Ähnlichkeitstransformation M von R derart, daß

$$\mathfrak{O}_{\mathsf{M}\mathfrak{Z}} = M^{-1}\mathfrak{O}_{\mathfrak{Z}}M = M^{-1}\mathfrak{O}M = \mathfrak{O}' = \mathfrak{O}_{\mathfrak{R}}$$

ist. Nach § 1, Nr. 4 ist also mit einem Ideal $\mathfrak{m}$ in k:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}\mathsf{M}\mathfrak{Z}.$$

Wegen (15) und (21), (22) ist $n(\mathfrak{R}) = n(\mathfrak{Z}) = n(\mathfrak{m}\mathfrak{Z})$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$, und der Beweis ist erbracht.

2. Wir wollen gleich eine Reduktion des Problems vornehmen. Soll $\mathfrak{M}$ als ein Hauptideal (22) nachgewiesen werden, so darf man $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}P$ ersetzen, wo P ein beliebiges nicht singuläres Quaternion ist. Man kann P so finden, daß $\mathfrak{M}'$ gewissen zusätzlichen Bedingungen genügt, welche den Beweis von (22) erleichtern.

Ein ganzes Hilfsideal $\mathfrak{u}$ in k sei vorgelegt, über welches unten verfügt wird. Alle Primideale $\mathfrak{p}$ in k teilen wir in zwei Klassen ein. Die erste enthalte die Primteiler von $\mathfrak{u}$ sowie alle diejenigen $\mathfrak{p}$, für welche $T_{\mathfrak{p}}$ in (19) keine Einheit von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ ist. Das sind zusammen nur endlich viele. Die übrigen $\mathfrak{p}$ bilden die zweite Klasse. Die Zugehörigkeit zu einer dieser Klassen wird durch die Indizes 1 und 2 angedeutet.

Für jedes $\mathfrak{p}_1$ gibt es einen Exponenten $h_{\mathfrak{p}_1}$ so, daß

$$\mathfrak{p}_1^{h_{\mathfrak{p}_1}}\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}T_{\mathfrak{p}_1} \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}$$

ist. Dann hat jedes der Kongruenz

$$P \equiv T_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \bmod \mathfrak{p}_1^{h_{\mathfrak{p}_1}}\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1} \tag{23}$$

genügende Element P aus C die Eigenschaft

$$T_{\mathfrak{p}_1}P \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}.$$

Es gibt sicher ein P, welches den Kongruenzen (23) für alle $\mathfrak{p}_1$ genügt und außerdem für alle $\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_2}$ liegt. Dann ist

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}P \subset \mathfrak{O},$$

d. h. $\mathfrak{M}'$ ist ein „ganzes" Ideal, und seine Norm ist

$$t(\mathfrak{M}') = \mathfrak{z}\,t(P).$$

Es ist nach (23), sofern $h_{\mathfrak{p}_1}$ hinreichend groß gewählt wurde,

$$t(P) \equiv t(T_{\mathfrak{p}_1})^{-1} \bmod (\mathfrak{z}\mathfrak{u})_{\mathfrak{p}_1}$$

und nach (18): $t(P) \equiv 1 \bmod (\mathfrak{z}\mathfrak{u})_{\mathfrak{p}_1}$ für alle $\mathfrak{p}_1$, also $t(P) \equiv 1 \bmod \mathfrak{z}\mathfrak{u}$. Wir schreiben wieder $\mathfrak{M}$ an Stelle von $\mathfrak{M}'$ und dürfen von jetzt ab

voraussetzen: $\mathfrak{M}$ *ist ein ganzes Linksideal für* $\mathfrak{O}$, *seine Norm ist*

$$t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{z}t \quad \text{mit } t \equiv 1 \bmod \mathfrak{z}\mathfrak{u}, \tag{24}$$

und t *ist die Norm eines Elements aus* C.

3. Die Übersetzung von Satz 3 (für $n = 3$ oder 4) in die Sprache der hyperkomplexen Arithmetik ist wegen der besonderen Voraussetzungen über k einfacher. Die $T_\mathfrak{p}$ in (17) können wie oben so normiert werden, daß es fast immer Einheiten in $k_\mathfrak{p}$ sind. Ihre Normen sind rationale Zahlen. Da in k alle Ideale Hauptideale sind, gibt es eine positive rationale Zahl t so, daß

$$t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{z}t \tag{25}$$

ist. Auch jetzt braucht man nur die Gleichung (22) zu beweisen.

Schwieriger ist aber die in Nr. 2 vorgenommene Reduktion des Problems; hierbei muß von der vorausgesetzten Maximalität von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ Gebrauch gemacht werden. Wird zunächst das Element P in C so konstruiert wie in Nr. 2, so ist jetzt für $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}P$

$$t(\mathfrak{M}') = \mathfrak{z}t'$$

mit $t' = t \cdot t(P)$. Da $t > 0$ war, ist t' sicher die Norm eines Elements P_0 aus C. Ferner ist t' zu $\mathfrak{u}$ teilerfremd und $\mathfrak{M}'$ ist ein ganzes Ideal. Wir werden sogleich für jedes in $\mathfrak{u}$ aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ die Existenz eines Elements $P_{1\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ nachweisen, dessen Norm $t(P_{1\mathfrak{p}}) = t(P_0^{-1})$ ist. Es gibt dann in $\mathfrak{O}$ ein Element P_1 mit

$$P_1 \equiv P_{1\mathfrak{p}} \bmod (\mathfrak{O}\mathfrak{u})_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{u}.$$

Jetzt erfüllt $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}'P_1$ die am Schluß von Nr. 2 formulierten Voraussetzungen.

Es folgt der Nachweis eines Elements $P_{1\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ der Norm $t(P_{1\mathfrak{p}}) = t(P_0)^{-1} = t'^{-1}$. Wir sahen bereits oben, daß t', also auch t'^{-1}, eine $\mathfrak{p}$-adische Einheit ist. Es beschränkt nicht die Allgemeinheit, wenn $n(\mathfrak{J}) = \mathfrak{o}$ angenommen wird, denn von $n(\mathfrak{J})$ hängt die Ordnung $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_\mathfrak{J}$ definitionsgemäß nicht ab. $\mathfrak{J}$ besitzt jetzt als maximales Gitter eine Normalbasis $[\omega_\nu]$, deren Multiplikationstabelle $(\omega_\mu \omega_\nu)$ eine der folgenden 5 Gestalten hat[20]):

$$\begin{pmatrix} 2e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2p & 0 & 0 \\ 0 & 2e_2 & f \\ 0 & f & 2e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2e & 0 & 0 \\ 0 & 2pe_2 & pf \\ 0 & pf & 2pe_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_3 & b \\ 0 & 0 & b & 2a_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2e_1 & f & 0 & 0 \\ f & 2e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2pe_1 & -pf \\ 0 & 0 & -pf & -2pe_2 \end{pmatrix};$$

[20]) QFOG, Satz 9.7.

hier bedeutet p ein Primelement, e eine Einheit von $k_\mathfrak{p}$. Ferner ist $4e_ie_{i+1}-f^2$ eine Einheit von $k_\mathfrak{p}$ und $e_ix^2+fxy+e_{i+1}y^2$ eine die Null nicht nicht-trivial darstellende ganzzahlige quadratische Form, d. h. die Normenform der Hauptordnung der einzigen unverzweigten quadratischen Erweiterung von $k_\mathfrak{p}$. Endlich ist $a_2x^2+bxy+a_1y^2$ die Normenform der Hauptordnung einer beliebigen quadratischen Erweiterung von $k_\mathfrak{p}$.

Im ersten Falle ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ isomorph mit der Ordnung aller ganzzahligen 2-reihigen Matrizen über $k_\mathfrak{p}$. Im zweiten ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ eine maximale Ordnung der einzigen nullteilerfreien Quaternionen-Algebra über $k_\mathfrak{p}$. Beide Male enthält $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ ein Element $P_{1\mathfrak{p}}$, dessen Norm eine beliebig vorgegebene Einheit in $k_\mathfrak{p}$ ist.

In den beiden letzten Fällen enthält $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ ein dreidimensionales Teilgitter $\mathfrak{Z}'_\mathfrak{p}$, für welches eine Basis mit einer Multiplikationstabelle der beiden ersten Arten angegeben werden kann. Die Ordnung $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Z}'_\mathfrak{p}}$ ist maximal und in $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}}$ enthalten, so daß man sich wegen der Existenz von $P_{1\mathfrak{p}}$ auf Früheres berufen kann.

Der dritte Fall wurde in der Zusatzvoraussetzung zu Satz 3 ausgeschlossen.

§ 3.

Beweis der Sätze 1 und 3.

1. Es ist jetzt zu zeigen, daß das Ideal $\mathfrak{M}$ ein Hauptideal (22) ist, sofern die am Schluß von § 2, Nr. 2 formulierten Voraussetzungen zutreffen. Es wird dabei das folgende Prinzip benutzt:

Das Element t in Z genüge für ein geeignetes u *der Kongruenz*

$$t \equiv 1 \bmod \mathfrak{z}\mathfrak{u} \tag{26}$$

und trete als die Norm eines Elements aus C auf.

Es gibt dann in Z ein Element s von folgender Beschaffenheit:

a) 1. *Z sei ein Körper. s^2-4t ist in keiner* $\mathfrak{p}$*-adischen Erweiterung $Z_\mathfrak{p}$ von Z ein Quadrat, für welche $C_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist (es sind sowohl die endlichen wie die unendlichen* $\mathfrak{p}$ *in Betracht zu ziehen).*

2. *Z sei die direkte Summe zweier mit k isomorpher Körper mit den orthogonalen Idempotenten E_1 und E_2. Weder $(s^2-4t)E_1$ noch $(s^2-4t)E_2$ ist ein Quadrat in irgendeiner* $\mathfrak{p}$*-adischen Erweiterung $k_\mathfrak{p}E_1$ oder $k_\mathfrak{p}E_2$, für welche $C_\mathfrak{p}E_1$ oder $C_\mathfrak{p}E_2$ nullteilerfrei sind.*

b) $s \equiv 2 \bmod \mathfrak{z}\mathfrak{u}$.

C enthält ein Element M der Norm $t(M)=t$ und der Spur $s(M)=s$. M ist in einer maximalen Ordnung $\mathfrak{O}_0$ von C enthalten, und für jede ganze in u *zum Quadrat aufgehende Zahl h von k gilt sogar*

$$M \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}_0 h. \tag{27}$$

Wir weisen zunächst die gleichzeitige Erfüllbarkeit von a) und b) unter Vernachlässigung der unendlichen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von Z nach, für welche $C_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist. Die Bedingung b) wird verschärft, wenn man $\mathfrak{u}$ durch ein ganzes Vielfaches ersetzt. Daß dabei gleichzeitig die Voraussetzung (26) verschärft wird, stört in der Anwendung nicht. Es beschränkt daher nicht die Allgemeinheit, wenn man $\mathfrak{u}$ durch alle die endlichen Primdivisoren teilbar annimmt, für welche $C_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist. Später machen wir dann noch von der Möglichkeit Gebrauch, die Potenz, in der ein Primideal in $\mathfrak{u}$ aufgeht, nach Erfordernis zu erhöhen.

Es sei jetzt $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{u}$ aufgehendes Primideal von k, es teile $\mathfrak{u}$ in der Potenz $\mathfrak{p}^u$; p sei ein Primelement von k_p. Wegen (26) ist

$$t = 1 + p^u a$$

mit einem Element a aus $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}$. Mit einem b aus $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ setze man

$$s = 2 + p^u b. \tag{28}$$

Dann ist

$$s^2 - 4t = 4p^u(b - a + p^u b^2).$$

Im Falle $n = 3$ ist $Z = k$. Man wähle u so groß, daß p^u durch $4\mathfrak{p}$ teilbar und $4\mathfrak{p}^u$ eine ungerade Potenz von $\mathfrak{p}$ in $k_\mathfrak{p}$ ist. Ferner wähle man b so, daß $b - a$ eine Einheit und s in $\mathfrak{z}$ gelegen ist. Dann ist $s^2 - 4t$ kein Quadrat in $k_\mathfrak{p}$. Im Falle $n = 4$ kann entsprechend verfahren werden, wenn Z eine direkte Summe $kE_1 + kE_2$ ist, oder wenn Z eine quadratische Erweiterung von k ist, in welcher $\mathfrak{p}$ nicht verzweigt ist. In diesem letzten Falle sei $\mathfrak{q}$ das in $\mathfrak{p}$ aufgehende Primideal von Z und q ein Primelement in $Z_\mathfrak{q}$. Man setze an Stelle von (28)

$$s = 2 + q^v b. \tag{29}$$

Es ist dann

$$s^2 - 4t = 4q^v(b - p^u q^{-v} a + q^v b^2).$$

Man mache v so groß, daß $4q^v$ eine ungerade Potenz von $\mathfrak{q}$ enthält. Darauf mache man u so groß, daß $p^u q^{-v}$ in $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}$ liegt. Endlich wähle man b so, daß $b - p^u q^{-v} a$ eine Einheit und s in $\mathfrak{z}$ gelegen ist. Für hinreichend großes v wird gleichzeitig b) mit erfüllt.

Es ist damit die Existenz eines Elements $s = s_0$ gezeigt, welches die Bedingungen a), b) erfüllt, abgesehen von den Bedingungen a) für die unendlichen Primdivisoren $\mathfrak{p}$, für welche $C_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ausfällt. Ein beliebiges Element s aus Z mit der Eigenschaft

$$s \equiv s_0 \bmod \mathfrak{z}\mathfrak{u}^2 \tag{30}$$

erfüllt ebenfalls die genannten Bedingungen.

Für die unendlichen nicht-archimedischen Primdivisoren $\mathfrak{p}$, für welche $C_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist, kann man a) in der Form einer ähnlichen

Kongruenz wie (30) sicherstellen. Der Modul dieser Kongruenz wird dabei ein Potenzprodukt $\mathfrak{v}$ dieser $\mathfrak{p}$, und die rechte Seite kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich s_0 annehmen. Man hat dann an Stelle von (30) die Kongruenz

$$s \equiv s_0 \bmod \mathfrak{u}^2\mathfrak{v}. \tag{31}$$

Für die archimedischen Primdivisoren $\infty_1, \ldots, \infty_r$, für welche C_{∞_ϱ} nullteilerfrei bleibt, bilde man eine Größe s_1 in Z von folgender Beschaffenheit

$$s_1 \equiv 1 \bmod \mathfrak{u}^2\mathfrak{v}, \quad |s_1|_{\infty_\varrho} < 1 \text{ bzw. } |s_1 E_1|_{\infty_\varrho} < 1, \quad |s_1 E_2|_{\infty_\varrho} < 1, \tag{32}$$

je nachdem ob Z ein Körper oder die direkte Summe zweier Körper ist. Es gibt sicher solch ein s_1, welches sogar von den ganzen rationalen Zahlen ganz abhängt, falls nicht alle archimedischen Primdivisoren von Z unter den ∞_ϱ auftreten. Man setze dann

$$s = s_0 s_1^v, \quad v \geqq 0. \tag{33}$$

Die Kongruenzen (31) sind erfüllt. Ferner ist

$$s^2 - 4t < 0 \text{ in } k_{\infty_\varrho}, \text{ sofern } |s|^2_{\infty_\varrho} = |s_0|^2_{\infty_\varrho} |s_1|^{2v}_{\infty_\varrho} < 4|t|_{\infty_\varrho}$$

bzw.

$$(s^2 - 4t)E_i < 0 \text{ in } k_{\infty_\varrho} E_i, \text{ sofern } |sE_i|^2_{\infty_\varrho} = |s_0 E_i|^2_{\infty_\varrho} |s_1 E_i|^{2v}_{\infty_\varrho} < 4|tE_i|_{\infty_\varrho}.$$

Denn da t die Norm eines Elements aus C ist, muß nach dem Zusatz zu Satz 5:

$$t > 0 \text{ in } k_{\infty_\varrho} \text{ bzw. } tE_i > 0 \text{ in } k_{\infty_\varrho} E_i$$

gelten. Damit sind alle Bedingungen a), b) erfüllt.

Aber auch, wenn C_∞ nullteilerfrei ist für alle archimedischen Primdivisoren ∞ von Z, gibt es ein Element s_1 der Beschaffenheit (32) in Z, es wird allerdings i. a. nicht von den ganzen rationalen Zahlen ganz abhängig sein, sondern eine Potenz eines solchen unendlichen nunmehr nicht-archimedischen Primdivisors $\mathfrak{r}$ von k im Nenner enthalten, für welchen $R_\mathfrak{r}$ isotrop und damit $C_\mathfrak{r}$ nullteilerhaltig ist. Die Existenz eines solchen $\mathfrak{r}$ ist der Inhalt der vorausgesetzten arithmetischen Indefinitheit der Gitter $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$.

Aus a) folgt bekanntlich: es gibt ein Element M in C, dessen charakteristische Gleichung $M^2 - sM + t = 0$ ist.

Es sei nun h eine in $\mathfrak{u}$ zum Quadrat aufgehende ganze Zahl in k. Die charakteristische Gleichung von $N = h^{-1}(M-1)$ ist $N^2 - h^{-1}(s-2)N + h^{-2}(t-1) = 0$. Ihre Koeffizienten sind voraussetzungsgemäß ganz. Also ist N in einer maximalen Ordnung $\mathfrak{O}_0$ von C enthalten und $M = 1 + hN$. Damit ist obige Behauptung bewiesen.

2. Nach geeigneter Verfügung über das Hilfsideal $\mathfrak{u}$ kann jetzt gezeigt werden, daß ein Element M der Norm t in dem Ideal $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Das geschieht in 3 Schritten. Zuerst wird gezeigt, daß es solch ein M in $\mathfrak{O}$ gibt.

$\mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_f$ sei ein Vertretersystem aller Typen maximaler Ordnungen in C. Es gibt eine ganze Zahl h in k derart, daß

$$h\mathfrak{O}_\varphi < \mathfrak{O} \qquad (\varphi = 1, \ldots, f) \tag{34}$$

gilt. Man wähle $\mathfrak{u}$ so groß, daß h^2 in $\mathfrak{u}$ aufgeht. Das Element N $N = h^{-1}(M-1)$ ist in einer maximalen Ordnung $\mathfrak{O}_0$ enthalten. Es gibt ein Quaternion T sowie einen Index φ aus der Reihe $1, \ldots, f$, etwa $\varphi = 1$, so daß $T^{-1}\mathfrak{O}_0 T = \mathfrak{O}_1$ ist. Man ersetze M durch $T^{-1}MT$. Man darf hiernach ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N \in \mathfrak{O}_1$ voraussetzen. Wegen (34) liegt dann M in $\mathfrak{O}$.

3. Das Hilfsideal $\mathfrak{u}$ sei durch die Diskriminante von $\mathfrak{O}$ bezügl. $\mathfrak{o}$ teilbar. Alle im Zähler von t aufgehenden Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von Z haben dann wegen (26) die Eigenschaft: $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ ist isomorph mit der Ordnung aller zweireihigen Matrizen mit ganzen Elementen aus $Z_\mathfrak{p}$ bzw. aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_1 + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_2$ (sofern Z die direkte Summe $kE_1 + kE_2$ war). Es sei $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ der größte gemeinsame Teiler der Matrixelemente von $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$; $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ ist ein Ideal in der Hauptordnung von $Z_\mathfrak{p}$ bzw. in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_1 + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_2$. $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}^2$ geht also in t auf. Da die $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ alle zur Diskriminante von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, also erst recht zur Diskriminante von $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ prim sind, sind sie Hauptideale. Es gibt jetzt ein Ideal $\mathfrak{q}$ für die (i. a. nicht maximale) Ordnung $\mathfrak{z}$, dessen $\mathfrak{p}$-adische Erweiterungen für diese $\mathfrak{p}$ gleich $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$, für alle übrigen $\mathfrak{p}$ dagegen $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ sind:

$$\mathfrak{q} = Z \cap \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1'} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_2'} \cap \ldots.$$

Alle als Durchschnitte $\mathfrak{p}$-adischer Hauptideale in der Weise

$$\mathfrak{a} = Z \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1} a_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1'} a_1' \cap \ldots$$

gebildeten Ideale für $\mathfrak{z}$ bilden eine Abelsche Gruppe. Sie zerfallen ebenso wie die Ideale zu einer maximalen Ordnung in endlich viele Idealklassen. Jede Idealklasse enthält ganze Ideale, und die ganzen Ideale einer Klasse haben keinen von $\mathfrak{z}$ verschiedenen gemeinsamen Teiler.

Wir setzen jetzt endlich voraus, daß es in jeder Idealklasse für $\mathfrak{z}$ ein ganzes und zu der oben konstruierten Zahl h teilerfremdes Ideal gibt, dessen Quadrat in dem Hilfsideal $\mathfrak{u}$ aufgeht. Insbesondere gibt es also ein ganzes zu h primes Ideal $\mathfrak{l}$ für $\mathfrak{z}$, mit welchem $\mathfrak{q}\mathfrak{l} = \mathfrak{z}l$ ein Hauptideal ist, und dessen Quadrat in $\mathfrak{u}$ aufgeht. Wir bestimmen nun ein Element q in $\mathfrak{z}$, welches den Kongruenzen

$$q \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}, \quad q \equiv 1 \bmod \mathfrak{u} \tag{35}$$

genügt, während $q\mathfrak{q}^{-1}$ zu t prim sei (gegebenenfalls sollen $q\mathfrak{q}^{-1}E_1$ und $q\mathfrak{q}^{-1}E_2$ zu tE_1 und tE_2 prim sein).

Das Ideal $\mathfrak{q}$ ist voraussetzungsgemäß zu $\mathfrak{u}$ prim. In Nr. 1 darf man daher außer den Bedingungen a), b) auch noch die weitere stellen:

$$s \equiv q \bmod \mathfrak{z}t. \tag{36}$$

Jetzt folgt, daß $N' = l^{-1}h^{-1}(M-q)$ ganz ist. Die Spur von N' ist nämlich $l^{-1}h^{-1}(s-2q)$, $s-2q$ ist wegen (35), (36) durch $\mathfrak{q}$ teilbar, wegen (35) und $\mathfrak{l}^2\mathfrak{h}^3/\mathfrak{u}$ ist $s-2q$ durch $\mathfrak{l}\mathfrak{h}$ teilbar. Da $\mathfrak{z}l = \mathfrak{q}\mathfrak{l}$, ist also $l^{-1}h^{-1}(s-2q)$ ganz. Ebenso zeigt man, daß die Norm $l^{-2}h^{-2}(t-qs+q^2)$ ganz ist.

Hierauf folgt wie oben, daß $l^{-1}(M-q) = hN'$ in $\mathfrak{O}$ enthalten ist. Also M ist in $\mathfrak{O}$ enthalten und durch $\mathfrak{q}$ teilbar. Weil endlich vorausgesetzt wurde, daß $q\mathfrak{q}^{-1}$ zu t prim sei, sowie wegen (36), ist für keinen Teiler $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{z}$ von t: $\mathfrak{q}'^{-1}\mathfrak{q}^{-1}M$ in $\mathfrak{O}$ enthalten, denn die Spur hiervon ist nicht ganz. Folglich sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{O}M$ zwei ganze Linksideale für $\mathfrak{O}$ der gleichen Norm und mit den gleichen Zentrumsteilern. Dieses war der zweite Beweisschritt.

4. Im dritten Teil des Beweises zeigen wir endlich: es gibt eine Einheit H der Norm 1 von $\mathfrak{O}$ derart, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{O}MH$ ist. Man kann alsdann in (22) M durch MH ersetzen. Wir erinnern dazu an die Darstellung (19) des Ideals $\mathfrak{M}$. Die dort auftretenden Elemente $T_\mathfrak{p}$ sind, da $\mathfrak{M}$ jetzt ein ganzes Ideal sein soll, Einheiten von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, sofern $t(\mathfrak{M}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{z}_\mathfrak{p}t$ das Einheitsideal ist. $\mathfrak{p}$ bedeutet hier ein Primideal von k, und unter $Z_\mathfrak{p}$ hat man das kommutative hyperkomplexe System $k_\mathfrak{p}(\sqrt{J(R)})$ zu verstehen. Für die endlich vielen Primideale der Eigenschaft $t(\mathfrak{M}_\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ dagegen ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ isomorph mit der Ordnung aller 2-reihigen Matrizen mit ganzen, d. h. genauer von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ganz abhängigen Elementen aus $Z_\mathfrak{p}$.

Man stelle M und $T_\mathfrak{p}$ für diese letzteren $\mathfrak{p}$ als zweireihige Matrizen dar. Beide haben ganze Koeffizienten, der größte gemeinsame Teiler von ihnen ist nach Nr. 3 beide Male $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$. Auf Grund der Elementarteilertheorie gibt es zwei unimodulare Matrizen $U_\mathfrak{p}$ und $E_\mathfrak{p}$ derart, daß

$$T_\mathfrak{p} = U_\mathfrak{p} M E_\mathfrak{p}$$

ist. Dabei darf man sogar voraussetzen, daß die Determinante von $E_\mathfrak{p}$ gleich 1 sei. $U_\mathfrak{p}$ und $E_\mathfrak{p}$ dürfen als Einheiten von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ aufgefaßt werden, und es ist $t(E_\mathfrak{p}) = 1$. Folglich gilt für alle diese $\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} M E_\mathfrak{p}. \tag{37}$$

Ist H eine andere Einheit von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, welche der Kongruenz

$$H \equiv E_\mathfrak{p} \bmod \mathfrak{O}_\mathfrak{p} t \tag{38}$$

genügt, so gilt auch

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} M H. \tag{39}$$

In der Tat folgt aus (38):

$$G_\mathfrak{p} = H E_\mathfrak{p}^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}_\mathfrak{p} t;$$

wegen $t(\mathfrak{M}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{z}_\mathfrak{p}t$ ist dann auch $MG_\mathfrak{p}M^{-1}$ eine Einheit von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ und

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p} M H = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} M G_\mathfrak{p} M^{-1} \cdot M E_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} M E_\mathfrak{p},$$

d. h. aus (37) folgt (39).

Damit bleibt zu zeigen: es gibt eine Einheit H der Norm 1 von $\mathfrak{O}$, welche den Kongruenzen (38) für alle diejenigen $\mathfrak{p}$ genügt, für welche M keine Einheit von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ ist. Mit dieser Einheit H gelten die Gleichungen (39) für alle diese $\mathfrak{p}$. Für die übrigen $\mathfrak{p}$ gelten sie aber a fortiori. Mithin ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{O} M H$$

und der Beweis ist fertig.

Die Existenz von H folgt aus dem allgemeinen Satz 6, den wir in § 4 beweisen werden, und der auch im Weiteren eine wichtige Rolle spielen wird. Man hat dort $\mathfrak{f}$ gleich einem durch t teilbaren Ideal in k zu setzen und für A ein Element aus $\mathfrak{O}$ zu nehmen, welches den Kongruenzen

$$A \equiv E_\mathfrak{p} \bmod (\mathfrak{O}\mathfrak{f})_\mathfrak{p}$$

für alle Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{f}$ genügt. Das Element t in Satz 6 hat man in diesem Zusammenhang gleich 1 zu setzen.

§ 4.

Ein Existenzsatz für Quaternionen-Algebren.

1. Die Grundlage für alles Weitere bildet der folgende Satz, welcher gleichzeitig die Beweise der Sätze 1 und 3 abschließt.

Satz 6. *Es gebe einen unendlichen Primdivisor* $\mathfrak{r}$, *für den* $C_\mathfrak{r}$ *Nullteiler enthält.* $\mathfrak{O}$ *sei eine Ordnung in* C, $\mathfrak{f}$ *ein ganzes Ideal für* $\mathfrak{o}$ *in* k, A *ein Element in* $\mathfrak{O}$ *und endlich* t *ein Element in* $\mathfrak{z} = Z \cap \mathfrak{O}$ *von der Beschaffenheit, daß erstens*

$$\frac{t(A)}{t} \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\mathfrak{z} \tag{40}$$

gilt (d. h. der Zähler von $t^{-1}t(A) - 1$ *sei durch* $\mathfrak{f}$ *teilbar) und zweitens* t *die Norm eines Elements aus* C *ist. Dann enthält* $\mathfrak{O}$ *ein Element* H *mit den Eigenschaften*

$$t(H) = t, \quad A H^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}\mathfrak{f} \tag{41}$$

(d. h. es gibt eine ganze zu $\mathfrak{f}$ *teilerfremde Zahl* z *in* k, *für welche* $z(AH^{-1} - 1)$ *in* $\mathfrak{O}\mathfrak{f}$ *liegt).*

Sofern $\mathfrak{O}$ eine maximale Ordnung ist, wurde dieser Satz bereits früher bewiesen, und zwar sogleich für beliebige halbeinfache hyperkomplexe Systeme über algebraischen Zahlkörpern[21]). Allerdings wurde vorausgesetzt, daß $\mathfrak{o}$ die Ordnung aller im üblichen Sinne ganzen Zahlen aus k ist, was aber für den Beweis nicht wesentlich ist. Da sich die zitierte Begründung durch zwei Veröffentlichungen hinzieht, soll sie hier noch einmal gebracht werden, wobei die Beschränkung auf Quaternionen-Algebren einige Vereinfachungen erlaubt.

[21]) M. Eichler, Journ. reine angew. Math. **179** (1938), S. 227—251, Satz 5.

Es wird zunächst ein Spezialfall von Satz 6 erledigt: $\mathfrak{f}$ *sei prim zu* $6\mathfrak{o}$ *und zur Diskriminante von* $\mathfrak{O}$ *bezügl.* $\mathfrak{o}$, *es sei* $t(A) \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$ *und* $t = 1$. Gesucht wird also eine Einheit H, welche den Kongruenzen (41) genügt.

Da $\mathfrak{f}$ zur Diskriminante von $\mathfrak{O}$ prim ist, ist der Restklassenring von $\mathfrak{O} \bmod \mathfrak{O}\mathfrak{f}$ isomorph mit dem Ring der zweireihigen Matrizen, deren Koeffizienten die Restklassen von $\mathfrak{z} \bmod \mathfrak{f}\mathfrak{z}$ sind. A ist eine solche Matrix mit der Determinante $\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\mathfrak{z}$. Alle diese Matrizen bilden eine Gruppe, welche das direkte Produkt der entsprechenden für die einzelnen Primidealpotenzteiler $\mathfrak{p}^{\nu}\|\mathfrak{f}$ gebildeten Gruppen ist. Die letzteren werden erzeugt durch die speziellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man schreibe für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{f}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = BC \tag{42}$$

mit

$$a' = \frac{d}{ad-bc}, \quad b' = \frac{dw-b}{ad-bc}, \quad c' = \frac{-c}{ad-bc}, \quad d' = \frac{-cw+a}{ad-bc}$$

und setze a, b, c, d in $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}$ folgendermaßen an:

$$a = 1 + bc, \quad d = 1, \quad c = \frac{-4}{2b-w}, \quad 2b(b-w)(2b-w) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p},$$

was deshalb möglich ist, weil $\mathfrak{p}$ zu $6\mathfrak{o}$ teilerfremd angenommen wurde. Die Diskriminanten der Matrizen B und C in (42) sind übereinstimmend

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a'+d')^2 - 4(a'd'-b'c') = -16\,b(b-w)(2b-w)^{-2},$$

also zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd. Desgleichen ist die Diskriminante von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ zu $\mathfrak{p}$ prim. Also jede Matrix der Determinante $\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{\nu}\|\mathfrak{f}$ läßt sich als ein Produkt von solchen darstellen, deren Diskriminanten zu $\mathfrak{p}$ prim und deren Determinanten ebenfalls kongruent $1 \bmod \mathfrak{p}^{\nu}\|\mathfrak{f}$ sind.

Die zu erfüllende Kongruenz (41) läßt sich demnach so schreiben:

$$H \equiv A_{1\mathfrak{p}} \dots A_{m\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\nu}\|\mathfrak{f} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f}. \tag{43}$$

Die $A_{\mu\mathfrak{p}}$ sind Matrizen mit Elementen aus dem Restklassenring von $\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}^{\nu}\|\mathfrak{f}$, ihre Determinanten sind 1 und ihre Diskriminanten zu $\mathfrak{p}$ prim. Die Anzahl der Faktoren in (43) hängt zwar noch von $\mathfrak{p}$ ab. Fügt man aber noch triviale Faktoren $A_{\mu\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ hinzu, so darf man annehmen, daß die Zahl m von $\mathfrak{p}$ unabhängig sei. Die

Konstruktionsaufgabe läßt sich also endlich so formulieren: für jedes μ ist eine Einheit H_μ der Norm 1 anzugeben, welche den Kongruenzen

$$H_\mu \equiv A_{\mu\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{z}_\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f} \tag{44}$$

genügt, wobei $A_{\mu\mathfrak{p}}$ die Norm 1 und entweder eine zu $\mathfrak{p}$ prime Diskriminante hat oder $A \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}}$ ist. Je nachdem das Erstere oder das Letztere zutrifft, wollen wir im Folgenden $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$ schreiben.

Die Lösung der Kongruenzen (44) beruht nun auf dem folgenden Umstand: ist X eine Restklasse von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1} \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1^{f_{\mathfrak{p}_1}}$ der Eigenschaft

$$s(X) \equiv s(A_{\mu\mathfrak{p}_1}), \quad t(X) \equiv t(A_{\mu\mathfrak{p}_1}) \equiv 1 \bmod \mathfrak{z}_\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^{f_{\mathfrak{p}_1}} \tag{45}$$

(s = Spur), so gibt es, da die Diskriminante von $A_{\mu\mathfrak{p}_1}$ zu $\mathfrak{p}_1$ prim vorausgesetzt wurde, eine nicht singuläre Restklasse $T_{X,\mathfrak{p}_1} \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1^{f_{\mathfrak{p}_1}}$ derart, daß

$$T_{X,\mathfrak{p}_1}^{-1} X T_{X,\mathfrak{p}_1} \equiv A_{\mu\mathfrak{p}_1} \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1^{f_{\mathfrak{p}_1}} \tag{46}$$

gilt. Man denke sich diese Restklassen $T_{X,\mathfrak{p}_1}$ durch ebenso bezeichnete Elemente aus $\mathfrak{O}$ repräsentiert, deren Normen zur Diskriminante von $\mathfrak{O}$ teilerfremd sind, und welche außerdem den Kongruenzen

$$T_{X,\mathfrak{p}_1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'^{f_{\mathfrak{p}_1'}} \text{ für alle } \mathfrak{p}_1' \neq \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_1/\mathfrak{f} \tag{47}$$

genügen. Das Produkt der Normen der $T_{X,\mathfrak{p}_1}$ für alle (45) genügenden Restklassen X und ein festes $\mathfrak{p}_1$ heiße $v_{\mathfrak{p}_1}$. Das Produkt über die $v_{\mathfrak{p}_1}$ für alle $\mathfrak{p}_1$ heiße v.

Endlich sei u eine ganze durch alle $\mathfrak{p}_2$, $f_{\mathfrak{p}_2}$-mal teilbare Zahl, sofern ein $\mathfrak{p}_2$ überhaupt auftritt, sonst sei $u = 1$.

Jetzt wird an § 3 angeknüpft. Es wird $\mathfrak{u} = (u\,v\,h)^2\mathfrak{f}$ gesetzt, wo h die Zahl mit der Eigenschaft (34) ist. An Stelle von $s \equiv 2 \bmod \mathfrak{u}$ wird jetzt aber

$$s \equiv s(A_{\mu\mathfrak{p}}) \bmod \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1^{f_{\mathfrak{p}_1}} \text{ für alle } \mathfrak{p}_1/\mathfrak{f},\ s \equiv 2 \bmod u\,v\,h\mathfrak{z} \tag{48}$$

verlangt. Es gibt auf Grund der Schlüsse in § 3 ein Element H in C mit $t(H) = 1$ und der Eigenschaft, daß $h^{-1}u^{-1}v^{-1}(H-1)$ ganz ist. Wie oben darf man annehmen, daß dann $u^{-1}v^{-1}(H-1)$ in $\mathfrak{O}$ liegt oder mit anderen Worten:

$$H \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}u, \quad H \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}v. \tag{49}$$

Hiernach genügt H den Kongruenzen (44) für alle $\mathfrak{p}_2$. Mit je einem der Elemente $T_{X,\mathfrak{p}_1}$ gelten ferner die Kongruenzen (46). Man bilde das Produkt

$$T_H = \prod_{\mathfrak{p}_1} T_{X,\mathfrak{p}_1}$$

und hat dann wegen (46) und (47)

$$T_H^{-1} H T_H \equiv A_{\mu\mathfrak{p}_1} \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1^{f_{\mathfrak{p}_1}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}_1/\mathfrak{f}.$$

Nun ist aber voraussetzungsgemäß v durch die Norm von T_H teilbar, wegen der zweiten der Kongruenzen (49) ist also $T_H^{-1} H T_H$ auch ein Element aus $\mathfrak{O}$. Man wechsle die Bezeichnung und schreibe H an Stelle dieses Elements. Damit sind dann alle Kongruenzen (44) erfüllt; man beachte, daß durch Transformation mit T_H die erste der Kongruenzen (49) nicht ungültig gemacht wird.

2. Wir beweisen jetzt Satz 6 unter der schwächeren Einschränkung, daß nur noch $t = 1$ verlangt wird. Hierzu ersetzen wir zunächst A durch ein mod $\mathfrak{O}\mathfrak{f}$ kongruentes Element in $\mathfrak{O}$, dessen Norm zu $6\mathfrak{o}$ und zur Diskriminante von $\mathfrak{O}$ prim ist; dieses ist wegen $t(A) \equiv t \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$ offenbar möglich. Mit diesem neuen Element A bilden wir das Ideal $\mathfrak{M} = \mathfrak{O}A$. Nach dem Vorgang von § 3 können wir in $\mathfrak{O}$ ein Element M nachweisen, dessen Norm $t(M) = t(A)$ ist, welches noch der Kongruenz

$$M \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}\mathfrak{f} \tag{50}$$

genügt, und welches endlich die Eigenschaft hat, daß $\mathfrak{O}M$ durch dieselben Zentrumsideale teilbar ist wie $\mathfrak{M}$. Es ist jetzt für alle Primideale $\mathfrak{p}$ in k:

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} M E_\mathfrak{p}$$

mit Einheiten $E_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ der Normen 1. Man suche eine Einheit E in $\mathfrak{O}$ auf, welche den Kongruenzen

$$E \equiv E_\mathfrak{p} \bmod (\mathfrak{O}\, t(A))_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}/t(A)\mathfrak{o}$$

genügt. Auf Grund des bereits bewiesenen Teils von Satz 6 sowie der Annahme, daß $t(A)$ zu $6\mathfrak{o}$ und zur Diskriminante von $\mathfrak{O}$ prim sei, gibt es solch ein E, welches außerdem die Norm 1 hat. Dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{O}A = \mathfrak{O}ME$, also mit einer weiteren Einheit E' von $\mathfrak{O}$

$$A = E'ME.$$

Wegen (50) ist A nach dem Modul $\mathfrak{O}\mathfrak{f}$ der Einheit $E'E$ kongruent. Da ferner $t(M) = t(A)$ und $t(E) = 1$ war, ist auch $t(E'E) = 1$.

3. Der letzte Schritt des Beweises für Satz 6 ist schließlich ganz einfach. Auf Grund des Verfahrens von § 3 konstruiere man in $\mathfrak{O}$ ein Element B der Norm t so, daß der größte in k enthaltene Teiler, welcher in einer Potenz von $\mathfrak{f}$ aufgeht, für die beiden Ideale $\mathfrak{O}A$ und $\mathfrak{O}B$ gleich ausfällt. Dann ist für jedes $\mathfrak{p}/\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p} A = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} B E_\mathfrak{p}$$

mit einer Einheit $E_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ der Norm 1. Wie oben folgt die Existenz einer Einheit E von $\mathfrak{O}$ der Norm 1 mit

$$E \equiv E_\mathfrak{p} \bmod (\mathfrak{O}\mathfrak{f}^r)_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f}, \tag{51}$$

und einer beliebigen natürlichen Zahl r. Zu dieser Einheit E sowie zu jedem $\mathfrak{p}$ gibt es dann eine Einheit $E'_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft

$$A \equiv E'_\mathfrak{p} B E \bmod (\mathfrak{O}\mathfrak{f}^r)_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f}. \tag{52}$$

Macht man r so groß, daß jedes in $\mathfrak{f}$ aufgehende $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{f}'$ öfter aufgeht als in $t\mathfrak{f}$, so folgt aus $t(B) = t$, (52) und (40): $t(E'_\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$. Nach Nr. 2 gibt es eine Einheit E' von $\mathfrak{O}$ der Norm 1, welche den Kongruenzen

$$E' \equiv E'_\mathfrak{p} \bmod (\mathfrak{O}\mathfrak{f})_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f}$$

genügt. Dann genügt

$$H = E' B E$$

der Kongruenz (41), welche bei hinreichend großem r unmittelbar aus (52) folgt. Es ist konstruktionsgemäß $t(H) = t$.

§ 5.

Ein Existenzsatz für die Einheiten indefiniter Gitter.

1. Wir kommen zum zweiten Teil der Arbeit und setzen von jetzt ab voraus, daß k der rationale Zahlkörper und $\mathfrak{o}$ die Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen sei. Es darf allerdings nebenbei bemerkt werden, daß die folgenden Erörterungen nur insofern von dieser Voraussetzung Gebrauch machen, als sie sich auf die Tatsache stützen, daß jetzt ein indefiniter Raum über k einer Dimension $n > 4$ isotrop ist.

Ein Gitter $\mathfrak{J}$ und ein Teilgitter $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{J}$ seien vorgelegt. E und T seien lineare Operatoren in R. Gilt für jeden Vektor ι aus $\mathfrak{J}$:

$$\mathsf{E}\iota \equiv \mathsf{T}\iota \bmod \mathfrak{J}',$$

so führen wir die Bezeichnungsweise

$$\mathsf{E} \equiv \mathsf{T} \bmod \mathfrak{J}'/\mathfrak{J}$$

ein. Das nächste Ziel ist

Satz 7. *$\mathfrak{J}$ sei ein Gitter in einem indefiniten Raum der Dimension $n > 2$. $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ seien Primideale in k und $E_{\mathfrak{p}_\mu}$ eigentliche automorphe Einheiten von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$. Gesucht wird eine eigentliche automorphe Einheit E von $\mathfrak{J}$ der Eigenschaft*

$$\mathsf{E} \equiv \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{53}$$

Sofern die Exponenten f_μ oberhalb gewisser allein von den $\mathfrak{p}_\mu$ und $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}$ abhängigen Schranken liegen, ist für die Existenz eines solchen E notwendig und hinreichend: in den durch die Spinor-Normen der $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu}$ gegebenen Quadratklassen in $k_{\mathfrak{p}_\mu}$ gibt es Zahlen $t_{\mathfrak{p}_\mu}$ derart, daß sich die Kongruenzen

$$t^{-1} t_{\mathfrak{p}_\mu} \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} \tag{54}$$

durch eine Zahl t in k lösen lassen, deren Quadratklasse in $k_\mathfrak{q}$ für jedes von den $\mathfrak{p}_\mu$ verschiedene Primideal $\mathfrak{q}$ sowie für jeden unendlichen Primdivisor ∞ von k als Spinor-Norm einer Einheit E von $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ bzw. eines Automorphismus Ω_∞ von R_∞ auftritt.

Es wird zunächst die Notwendigkeit der genannten Existenzbedingung für E nachgewiesen. Es gebe solch ein E mit der Eigenschaft (53); dividiert man (53) durch E und schreibt wieder $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu}$ an Stelle von $\mathsf{E}^{-1}\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu}$, so entsteht

$$1 \equiv \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}. \tag{55}$$

Wir zeigen: wenn f_μ hinreichend groß ist, ist $t(\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu})$ die Einheitsquadratklasse. Daraus folgt dann, daß $t_{\mathfrak{p}_\mu} = t = 1$ genommen werden kann.

$[\iota_\nu]$ sei eine Basis von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ und F die Matrix

$$F = (\iota_\mu \iota_\nu).$$

Ist

$$\mathsf{E}_\mathfrak{p} \iota_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \iota_\mu e_{\mu\nu},$$

und setzt man $(e_{\mu\nu}) = E$, so besteht die Matrixgleichung

$$\dot{E} F E = F \quad \text{oder} \quad \dot{E} = F E^{-1} F^{-1}; \tag{56}$$

$\dot{E}$ bedeutet die gespiegelte Matrix. Wegen (55) ist $E \bmod \mathfrak{p}^f$ der Einheitsmatrix kongruent, welche wir mit dem Symbol 1 bezeichnen wollen. Folglich hat E nicht die Zahl -1 als Eigenwert, und es existiert

$$S = (E - 1)(E + 1)^{-1}. \tag{57}$$

Unter Benutzung von (56) bestätigt man leicht

$$F^{-1} \dot{S} F = -S. \tag{58}$$

Aus (57) folgt die bekannte Cayleysche Parameterdarstellung

$$E = (1 + S)(1 - S)^{-1} \tag{59}$$

der eigentlichen Automorphismen des Raumes R; ist S eine beliebige (58) genügende Matrix, für welche $(1 - S)^{-1}$ existiert, so genügt (59) der Gleichung (56) und stellt daher einen eigentlichen Automorphismus von R dar.

Da $E \bmod \mathfrak{p}^f$ der Einheitsmatrix kongruent ist, ergibt (57)

$$S \equiv 0 \bmod \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}^f, \tag{60}$$

falls $\frac{1}{2}\mathfrak{p}^f$ noch durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, was vorausgesetzt werden soll. Umgekehrt folgt aus (59) und (60), daß E eine ganzzahlige Matrix ist und daher eine eigentliche automorphe Einheit von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ darstellt.

Wir versuchen jetzt, die Matrix E als das Quadrat einer ähnlich gebauten Matrix

$$H = (1 + T)(1 - T)^{-1} \tag{61}$$

darzustellen, wobei auch T der Gleichung (58) genügt. Es muß gelten

$$S = ((1 + T)^2 (1 - T)^{-2} - 1)\ ((1 + T)^2 (1 - T)^{-2} + 1)^{-1},$$

d. h.

$$S = 2T(1 + T^2)^{-1}. \tag{62}$$

Wird f so groß angesetzt, daß $S \equiv 0 \bmod 2\mathfrak{p}$ ist, so besitzt (62) eine ganzzahlige Lösung T, die man leicht durch Iteration berechnen kann:

$$T_0 = \tfrac{1}{2} S, \quad T_1 = \tfrac{1}{2} S(1 + \tfrac{1}{4} S^2), \ldots, \quad T = \lim_{\nu \to \infty} T_\nu.$$

T erfüllt (58), es gilt $T \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$, daher stellt (61) wieder eine eigentliche automorphe Einheit H von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ dar, mit welcher

$$\mathsf{E}_\mathfrak{p} = \mathsf{H}^2$$

gilt. Folglich ist $t(\mathsf{E}_\mathfrak{p})$ die Einheits-Quadratklasse.

2. Jetzt ist umgekehrt zu zeigen, daß die genannten Existenzbedingungen für E auch hinreichen. Ist zunächst $n = 3$ oder 4, so ziehen wir dazu den Satz 6 heran. Die Einheiten $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu}$ seien dargestellt durch die Elemente $T_{\mathfrak{p}_\mu} = T(\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu})$ in $C_{\mathfrak{p}_\mu}$; sie können so normiert angesetzt werden, daß ihre Normen die in Satz 7 erwähnten Zahlen $t_{\mathfrak{p}_\mu}$ sind: $t(T_{\mathfrak{p}_\mu}) = t_{\mathfrak{p}_\mu}$. Es gebe eine Zahl t in k, welche den Kongruenzen (54) genügt, und welche als Spinor-Norm eines Automorphismus von R auftritt. Man kann die $T_{\mathfrak{p}_\mu}$ sämtlich mit einer Zahl t_0 von k multiplizieren, so daß die $t_0 T_{\mathfrak{p}_\mu}$ in $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu}$ liegen, wenn $\mathfrak{O}$ die $\mathfrak{J}$ zugeordnete Ordnung $\mathfrak{O}_\mathfrak{J}$ bedeutet. Dadurch multiplizieren sich die $t_{\mathfrak{p}_\mu}$ mit t_0^2. Wird auch noch t mit t_0^2 multipliziert, so bleiben die Kongruenzen (54) bestehen. Es beschränkt also die Allgemeinheit nicht, wenn $T_{\mathfrak{p}_\mu} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu}$ und $t(T_{\mathfrak{p}_\mu}) = t_{\mathfrak{p}_\mu}$ angenommen wird.

Nach Satz 6 gibt es ein Element T in $\mathfrak{O}$ der Eigenschaft

$$T_{\mathfrak{p}_\mu} T^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}, \tag{63}$$

dessen Norm t ist. Nach § 1 gehört zu T ein eigentlicher Automorphismus E von R, mit welchem $T(\mathsf{E}) = T$ ist.

Es muß nun sichergestellt werden, daß E eine Einheit von $\mathfrak{J}$ ist und außerdem den Kongruenzen (53) genügt. E ist dann und nur dann eine Einheit von $\mathfrak{J}$, wenn $T^{-1} \mathfrak{O} T = \mathfrak{O}$ oder

$$T^{-1} \mathfrak{O}_\mathfrak{p} T = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \text{ für alle Primideale } \mathfrak{p} \tag{64}$$

gilt. Ist $\mathfrak{p}$ gleich einem der Primideale $\mathfrak{p}_\mu$, so folgt (64) aus (63):

$$\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu} = (T_{\mathfrak{p}_\mu} T^{-1})^{-1} \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu} T_{\mathfrak{p}_\mu} T^{-1} = T \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu} T^{-1}.$$

Ja die Transformation von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu}$ mit $T_{\mathfrak{p}_\mu} T^{-1}$ induziert in dem Restklassenring von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu}$ mod $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}$ den identischen Automorphismus. Es ist also für je zwei Vektoren ι_1, ι_2 aus $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}$:

$$(\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathsf{E}^{-1} \iota_1, \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathsf{E}^{-1} \iota_2) \equiv (\iota_1, \iota_2) \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu} n(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}) \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}$$

und folglich für alle $\iota \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}$

$$\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathsf{E}^{-1} \iota \equiv \pm \iota \bmod \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}.$$

Hier kann nur das Zeichen + gelten. Ist nämlich $n = 3$, und gälte das Zeichen $-$, so würde die $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu}\mathsf{E}^{-1}$ darstellende Matrix eine Determinante $\equiv -1 \bmod \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}$ haben. Das ist aber bei eigentlichen Automorphismen unmöglich, sofern $\mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}$ durch $\mathfrak{p}_\mu$ öfter teilbar ist als 2. Ist $n = 4$, und gälte das Zeichen $-$, so beachte man, daß der Automorphismus Γ von R, welcher jeden Vektor ι in $-\iota$ überführt, durch das Element $T(\Gamma) = (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = J$ dargestellt wird, wobei (ι_r) eine Orthogonalbasis von R darstellt. Es müßte also $T_{\mathfrak{p}_\mu} T^{-1} \equiv sJ \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}$ mit einem gewissen s in k gelten. Wegen (63) ist diese Kongruenz unmöglich, sobald f_μ hinreichend groß ist. Es ist damit gezeigt, daß der Automorphismus E der Kongruenz (53) genügt.

Die Gleichungen (64) sind ferner richtig für alle Primideale $\mathfrak{p}$, welche nicht in t aufgehen; für diese ist nämlich T eine Einheit von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$. Von den Primteilern von t, für welche (64) noch nicht bewiesen ist, brauchen wir jetzt nur noch die von den $\mathfrak{p}_\mu$ verschiedenen zu betrachten; sie seien mit $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ bezeichnet. Voraussetzungsgemäß gibt es für die $\mathfrak{q}_\varrho$ Einheiten $\mathsf{E}_{\mathfrak{q}_\varrho}$ von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{q}_\varrho}$, deren Spinor-Normen gleich der Quadratklasse von t in $k_{\mathfrak{q}_\varrho}$ sind. Sie seien dargestellt durch die Elemente $T(\mathsf{E}_{\mathfrak{q}_\varrho})$ von $C_{\mathfrak{q}_\varrho}$, und diese kann man so normieren, daß $t(T(\mathsf{E}_{\mathfrak{q}_\varrho})) = t$ gilt. Man bestimme jetzt eine ganze Zahl t_1 in k, welche nur durch die $\mathfrak{q}_\varrho$ teilbar ist, so daß die Elemente $t_1 T(\mathsf{E}_{\mathfrak{q}_\varrho})$ in $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}_\varrho}$ liegen. Nochmalige Anwendung von Satz 6 ergibt die Existenz eines Elements T_1 in $\mathfrak{O}$ der Norm $t_1^2 t$, welches den Kongruenzen

$$t_1 T_{\mathfrak{p}_\mu} T_1^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}, \quad t_1 T(\mathsf{E}_{\mathfrak{q}_\varrho}) T_1^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}_\varrho}\mathfrak{q}_\varrho$$

genügt. Zu T_1 gehört ein eigentlicher Automorphismus E_1 von R. E_1 ist wieder eine Einheit von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ für alle nicht in $t_1^2 t$, d. h. in t aufgehenden $\mathfrak{p}$. Für die in $t_1^2 t$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}_\mu$ bzw. $\mathfrak{q}_\varrho$ gelten die Kongruenzen (53) mit E_1 an Stelle von E und daher (64).

3. Jetzt sei die Dimension des Raumes R größer als 4. Aus der vorausgesetzten Indefinitheit von R folgt, daß R ein isotroper Raum ist. Damit wird eine elementare Schlußweise anwendbar, welche auch den Beweis für Satz 2 in isotropen Räumen lieferte[22]). Wir geben im Folgenden lediglich die zum Beweis von Satz 7 notwendigen Modifikationen dieser Schlußweise an.

Man geht von einer direkten Summen-Zerlegung

$$R = R_0 + k(\iota_1, \iota_2) \quad \text{mit } \iota_1^2 = \iota_2^2 = 0,\ \iota_1\iota_2 = 1$$

und der darauf beruhenden Darstellung der eigentlichen Automorphismen von R und $R_{\mathfrak{p}_\mu}$ durch die Elemente $\mathsf{E}_\omega^i (i = 1, 2)$ und P_r aus. A. a. O. wurde die Darstellung der eigentlichen Automorphismen $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$

[22]) QFOG, § 15.

von $R_\mathfrak{p}$:

$$\mathsf{E}_\mathfrak{p} = \mathsf{E}^1_{\omega_1,\mathfrak{p}} \mathsf{E}^2_{\omega_2,\mathfrak{p}} \dots \mathsf{E}^2_{\omega_{2g},\mathfrak{p}} \mathsf{P}_{r_\mathfrak{p}} \tag{65}$$

benutzt; dabei ist $r_\mathfrak{p}$ eine Zahl aus der Quadratklasse $t(\mathsf{E}_\mathfrak{p})$, und zwar kann man die Darstellung so einrichten, daß $r_\mathfrak{p}$ eine beliebig vorgeschriebene Zahl aus dieser Quadratklasse ist. In diesem Zusammenhang darf $r_\mathfrak{p} = t$ gewählt werden. Die Anzahl g in (65) darf ferner von $\mathfrak{p}$ unabhängig angenommen werden. Es wurden nun im Beweis für Satz 2 Vektoren $\omega_1, \dots, \omega_{2g}$ aufgesucht, welche den Kongruenzen

$$\begin{cases} \omega_i \equiv \omega_{i,\mathfrak{p}} \bmod (\mathfrak{O}_0 \mathfrak{f})_\mathfrak{p} & \text{für eine gewisse endliche Menge von Primidealen } \mathfrak{p} \\ \omega_i \equiv 0 \bmod (\mathfrak{O}_0 \mathfrak{f})_\mathfrak{q} & \text{für alle übrigen Primideale } \mathfrak{q} \end{cases} \tag{66}$$

genügen, wobei $\mathfrak{O}_0$ ein geeignetes Gitter in R_0 und $\mathfrak{f}$ ein geeignetes Ideal in k ist. Aus diesen Kongruenzen folgte, daß der Automorphismus

$$\mathsf{E} = \mathsf{E}^1_{\omega_1} \mathsf{E}^2_{\omega_2} \dots \mathsf{E}^2_{\omega_{2g}} \mathsf{P}_t \tag{67}$$

von R eine eigentliche automorphe Einheit von $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q}$ ist und sich von den $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ nur um Einheiten von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ als rechtsseitige Faktoren unterscheidet. In unserem jetzigen Zusammenhang sind die $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ in (65) die in Satz 7 gegebenen Einheiten, und demnach wird E eine Einheit von $\mathfrak{J}$. Man nehme in das Ideal $\mathfrak{f}$ in (66) noch die Primideale $\mathfrak{p}_\mu$ in gewissen Potenzen h_μ auf. Dann folgt aus (65)—(67) für jedes $\mathfrak{p}_\mu$ das Bestehen einer Kongruenz

$$\mathsf{E} \equiv \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{h'_\mu} / \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu},$$

wobei die Exponenten h'_μ mit den h_μ unbegrenzt anwachsen. Bei geeigneter Verfügung über die h_μ werden also die Kongruenzen (53) erfüllt.

4. Mittels Satz 7 können wir nun einen Teil von Satz 4 beweisen:

Satz 8. *Die relativen Maße $u^+(\mathfrak{J})$ und $u^+(\mathfrak{R})$ der Einheitengruppen für zwei verwandte Gitter $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ in einem indefiniten Raum R stimmen überein.*

Ist die Dimension $n = 2$, so stimmen bekanntlich bereits die Einheitengruppen $\mathfrak{U}^+_\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{U}^+_\mathfrak{R}$ selber überein. Wir nehmen also $n > 2$ an.

Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es einen Exponenten $f_\mathfrak{p}$ so, daß eine Einheit E von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ (bzw. $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$), welche der Kongruenz

$$\mathsf{E} \equiv 1 \bmod \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}} / \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \text{ (bzw. } \bmod \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}} / \mathfrak{R}_\mathfrak{p}) \tag{68}$$

genügt, gleichzeitig eine Einheit von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ (bzw. $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$) ist[23]. Darauf beruht die Definition der relativen Maße $u^+(\mathfrak{J})$. Es bezeichne $\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$ die Gruppe der Restklassen der eigentlichen automorphen Einheiten von

[23] QFOG. § 16, Nr. 3.

$\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ nach dem Modul $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$, welche von Einheiten aus dem Durchschnitt $\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}$ geliefert wird. Entsprechend wird $\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}$ definiert. Es ist dann [24])

$$\frac{u^+(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})}{u^+(\mathfrak{R}_\mathfrak{p})} = \frac{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_\mathfrak{p}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}]}{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}]}. \tag{69}$$

Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ alle die Primideale, für welche $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \neq \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\mu}$ ist, und wird

$$\mathfrak{f} = \prod_{\mu=1}^{m} \mathfrak{p}_\mu^{f_{\mathfrak{p}_\mu}} \tag{70}$$

gesetzt, so sind alle Einheiten E von $\mathfrak{J}$ (bzw. $\mathfrak{R}$), welche der Kongruenz

$$\mathsf{E} \equiv 1 \bmod \mathfrak{J}\mathfrak{f}/\mathfrak{J} \quad \text{(bzw. } \bmod \mathfrak{R}\mathfrak{f}/\mathfrak{R})$$

genügen, Einheiten von $\mathfrak{R}$ (bzw. $\mathfrak{J}$). Wenn nun $\mathfrak{G}_\mathfrak{J}$, $\mathfrak{G}_\mathfrak{R}$ die Gruppen der Restklassen der eigentlichen automorphen Einheiten von $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R} \bmod \mathfrak{J}\mathfrak{f}/\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{f}/\mathfrak{R}$ bezeichnen und $\mathfrak{G}'_\mathfrak{J}$, $\mathfrak{G}'_\mathfrak{R}$ deren Untergruppen, welche durch Einheiten von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{J}$ vertreten werden, so ist

$$\frac{u^+(\mathfrak{J})}{u^+(\mathfrak{R})} = \frac{[\mathfrak{G}_\mathfrak{J} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{J}]}{[\mathfrak{G}_\mathfrak{R} : \mathfrak{G}_\mathfrak{R}]}. \tag{71}$$

Der Wert des Quotienten (71) ändert sich nicht, wenn in $\mathfrak{f}$ noch weitere Faktoren aufgenommen werden. Man kann nun zeigen: die Spinor-Normen von Einheiten von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ sind solche Quadratklassen in $k_\mathfrak{p}$, welche Einheiten von $k_\mathfrak{p}$ enthalten, sofern $\mathfrak{p}$ nicht in 2 und in der reduzierten Determinante $\mathfrak{d}(\mathfrak{J})$ von $\mathfrak{J}$ aufgeht [25]). Umgekehrt sieht man sofort, daß alle Quadratklassen $\mathfrak{p}$-adischer Einheiten als Spinor-Normen von Einheiten von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ auftreten, falls $\mathfrak{p}$ nicht in $2\,\mathfrak{d}(\mathfrak{J})$ aufgeht, und falls ferner die Dimension $n > 2$ ist. Die endlich vielen Primteiler von $2\,\mathfrak{d}(\mathfrak{J})$ und $\mathfrak{d}(\mathfrak{R})$ nehmen wir unter die $\mathfrak{p}_\mu$ auf. Die Exponenten $f_{\mathfrak{p}_\mu}$ werden so groß gewählt, wie es einerseits die Formel (71) verlangt, und daß sie andererseits den Anforderungen von Satz 7 genügen.

Wenn gezeigt werden soll, daß der Quotient (71) den Wert 1 hat, so darf man zuvor $\mathfrak{J}$ durch ein ähnliches Gitter $\mathsf{\Sigma}\mathfrak{J}$ ersetzen; ähnliche Gitter haben nämlich gleiche relative Gruppenmaße [26]). Die Ähnlichkeitstransformation $\mathsf{\Sigma}$ werde gemäß (2) gewählt. Aus diesem Grunde darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cong \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p} \tag{72}$$

vorausgesetzt werden.

---

[24]) Hier stehen die relativen Maße der Einheitengruppen von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. — Man erhält (69) aus der Definition unter Anwendung des zweiten Isomorphiesatzes.

[25]) Dies wurde in QFOG, § 13, Nr. 4 festgestellt.

[26]) QFOG, Satz 16.3.

Wir vergleichen jetzt die Gruppen $\mathfrak{G}_\mathfrak{J}$, $\mathfrak{G}_\mathfrak{R}$ mit den direkten Produkten

$$\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_m}}, \quad \overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1}} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_m}}.$$

$\mathfrak{G}_\mathfrak{J}$ ist eine Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{J}$. Ein Element von $\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{J}$ liegt in $\mathfrak{G}_\mathfrak{J}$, d. h. zu einem System $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_m}$ von Einheiten von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_m}$ gehört eine Einheit E von $\mathfrak{J}$ derart, daß

$$\mathsf{E} \equiv \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu'^{f_{\mathfrak{p}_\mu}} / \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

ist, wenn die folgende in Satz 7 ausgesprochene notwendige und hinreichende Bedingung erfüllt ist: In den durch die Spinor-Normen der $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu}$ gelieferten Quadratklassen gibt es Zahlen $t_{\mathfrak{p}_\mu}$, für welche die Kongruenzen

$$t^{-1} t_{\mathfrak{p}_\mu} \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_\mu'^{f_{\mathfrak{p}_\mu}}$$

durch eine Zahl t in k lösbar sind, deren Quadratklasse als Spinor-Norm einer Einheit $\mathsf{E}_\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ auftritt für jedes von den $\mathfrak{p}_\mu$ verschiedene Primideal $\mathfrak{q}$ von k, und außerdem als Spinor-Norm eines Automorphismus von R. Nach unserer Verfügung über die $\mathfrak{p}_\mu$ kann man aber auch sagen: diese Kongruenzen sind durch eine Zahl t in k lösbar, welche außer den $\mathfrak{p}_\mu$ keinen weiteren Primteiler enthält, und welche Spinor-Norm eines Automorphismus ist. Entsprechendes gilt für die Gruppen $\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}_\mathfrak{R}$. Zufolge (72) sind die Einheitengruppen von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}$, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\mu}$ isomorph; die Isomorphie erstreckt sich auf die Spinor-Normen. Es fallen also die folgenden Indizes gleich aus:

$$[\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{J} : \mathfrak{G}_\mathfrak{J}] = [\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{R} : \mathfrak{G}_\mathfrak{R}]. \tag{73}$$

Ferner brauchen wir die Gruppen

$$\overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{J} = \mathfrak{G}'_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}} \times \ldots \times \mathfrak{G}'_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_m}}, \quad \overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{R} = \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1}} \times \ldots \times \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_m}}$$

und müssen für sie analog zu (73) zeigen:

$$[\overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{J} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{J}] = [\overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{R} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{R}]. \tag{74}$$

Aus (73) und (74) folgt leicht die Behauptung. Wegen (72) sind die Quotienten (69) gleich 1. Man rechnet nun

$$1 = \prod_{\mu=1}^{m} \frac{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}}]}{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\mu}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\mu}}]} = \frac{[\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{J} : \overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{J}]}{[\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{R} : \overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{R}]} = \frac{[\mathfrak{G}_\mathfrak{J} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{J}]\,[\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{J} : \mathfrak{G}_\mathfrak{J}]\,[\overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{R} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{R}]}{[\mathfrak{G}_\mathfrak{R} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{R}]\,[\overline{\mathfrak{G}}_\mathfrak{R} : \mathfrak{G}_\mathfrak{R}]\,[\overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{J} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{J}]},$$

und das ist zufolge (73), (74) gleich

$$\frac{[\mathfrak{G}_\mathfrak{J} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{J}]}{[\mathfrak{G}_\mathfrak{R} : \mathfrak{G}'_\mathfrak{R}]} = 1.$$

Der Beweis für (74) beruht auf dem gleichen Prinzip wie der von (73); es ist allerdings noch eine Vorbereitung erforderlich. Es sei in Präzisierung von (72)

$$\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$$

mit einem eigentlichen oder uneigentlichen Automorphismus $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$. Nach E. CARTAN[27]) läßt sich $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ als ein Produkt von Spiegelungen $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},\varrho}$ schreiben:

$$\mathsf{T}_\mathfrak{p} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},r_\mathfrak{p}} \dots \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p},1}\,.$$

Man nehme zunächst diese Zerlegung für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ vor und bilde die Gitter

$$\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{J},\quad \mathfrak{K}_\varrho = R \cap \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p}_1,\varrho} \dots \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p}_1,1}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{q}_1} \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{q}_2} \cap \dots \quad (\varrho = 1, \dots, r_{\mathfrak{p}_1})$$

($\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \dots$ bedeute sämtliche Primideale $\neq \mathfrak{p}_1$). Die $\mathfrak{K}_\varrho$ gehören zum selben Geschlecht wie $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$. Man zerlege weiter $\mathsf{T}_{\mathfrak{p}_2}$ in Spiegelungen und bilde

$$\mathfrak{K}_{r_{\mathfrak{p}_1}+\varrho} = R \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p}_2,\varrho} \dots \mathfrak{Q}_{\mathfrak{p}_2,1}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_2} \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{q}_1} \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{q}_2} \cap \dots \quad (\varrho = 1, \dots, r_{\mathfrak{p}_2})$$

($\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots$ bedeuten sämtliche Primideale $\neq \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$). Fortsetzung dieser Bildungen liefert eine Kette verwandter Gitter, deren erstes $\mathfrak{J}$ und deren letztes $\mathfrak{K}$ ist. Je zwei aufeinanderfolgende $\mathfrak{K}_\varrho$, $\mathfrak{K}_{\varrho+1}$ haben die Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{K}_{\varrho+1,\mathfrak{p}} = \mathfrak{Q}_{\varrho,\mathfrak{p}}\,\mathfrak{K}_{\varrho,\mathfrak{p}}$$

gilt, wobei jeweils $\mathfrak{Q}_{\varrho,\mathfrak{p}} = 1$ ist für alle Primideale $\mathfrak{p}$ bis auf ein einziges, und in diesem Ausnahmefall ist $\mathfrak{Q}_{\varrho,\mathfrak{p}}$ eine Spiegelung. Wenn $u^+(\mathfrak{K}_\varrho) = u^+(\mathfrak{K}_{\varrho+1})$ gezeigt werden kann, ist damit gleichzeitig der Satz 8 bewiesen. Aus diesem Grunde beschränkt es nicht die Allgemeinheit, wenn vorausgesetzt wird, daß $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1$ gilt, während $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}$ mit einer Spiegelung $\mathfrak{Q}$ von $R_{\mathfrak{p}_1}$ ist.

Unter dieser Voraussetzung ist jetzt

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}} = \mathfrak{G}'_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_{j\mu}}} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_{j\mu}}} = \mathfrak{G}'_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_{j\mu}}}\,. \qquad (\mu \neq 1).$$

Ferner ist $\mathfrak{Q}^2 = 1$ und

$$\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}}\,\mathfrak{Q}^{-1},\quad \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}}\,\mathfrak{Q}^{-1}$$

und daher

$$\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}} \cap \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}} = \mathfrak{Q}\,(\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}} \cap \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}})\,\mathfrak{Q}^{-1}.$$

Die isomorphe Abbildung $\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}} \to \mathfrak{Q}\,\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}}\,\mathfrak{Q}^{-1}$ bildet nun $\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}}$ isomorph auf $\mathfrak{G}_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}}$ ab, und bei dieser Abbildung geht gleichzeitig $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1}}$ in $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}}$ über. Die Elemente aus $\overline{\mathfrak{G}}'_\mathfrak{J}$, d. h. die Systeme $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_1}, \dots, \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_m}$ von Restklassen von Einheiten mod $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}\,\mathfrak{p}_{j\mu}^{f\mathfrak{p}_\mu}/\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}$, werden auf Systeme von Einheiten $\mathfrak{Q}\,\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_1}\,\mathfrak{Q}^{-1}, \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_2}, \dots, \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_m}$ mod $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_{j\mu}}\,\mathfrak{p}_{j\mu}^{f\mathfrak{p}_\mu}/\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_{j\mu}}$ abgebildet. Bei dieser

[27]) QFOG, Satz 1.5.

Abbildung bleiben die Spinor-Normen ungeändert und daher sind beide nach Satz 7 gleichzeitig durch Einheiten von $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{K}$ vertretbar oder nicht. Mit diesem Beweis für (74) ist auch die Begründung von Satz 8 vollständig.

§ 6.

Eine Verschärfung der bisherigen Ergebnisse.

1. Bisher beruhten alle Betrachtungen im Prinzip auf dem Existenznachweis von Automorphismen, speziell von automorphen Einheiten mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften. Es liegt nahe, sie dadurch zu verschärfen, daß man weiterhin verlangt, diese Automorphismen sollen ein vorgeschriebenes Parallelotop fest lassen. Es werde also ein halbeinfaches Parallelotop $\mathfrak{T}$ in R fixiert und vorausgesetzt, *daß der auf* $T = k(\mathfrak{T})$ *senkrechte Teilraum* T' *von* R *indefinit sei und eine Dimension* $n > 2$ *habe.*

Zwei Gitter $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ in R heißen *verwandt bezüglich* $\mathfrak{T}$, wenn es für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ einen eigentlichen Automorphismus $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$ mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{K}_\mathfrak{p} = \mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}, \quad \mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$$

gibt. $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ heißen *Spinor-verwandt bezüglich* $\mathfrak{T}$, wenn es einen eigentlichen Automorphismus T von R und für jedes $\mathfrak{p}$ eine eigentliche automorphe Einheit $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ so gibt, daß

$$t(\mathsf{T}) = t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathsf{E}_\mathfrak{p}), \quad \mathsf{T}\mathfrak{T} = \mathsf{E}_\mathfrak{p}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$$

gilt. Man kann natürlich gleich $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ an Stelle von $\mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ schreiben und dann das Erfülltsein der letzteren Gleichungen mit $\mathsf{E}_\mathfrak{p} = 1$ verlangen. Endlich heißen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ *isomorph bezüglich* $\mathfrak{T}$, wenn es einen eigentlichen Automorphismus T von R mit

$$\mathfrak{K} = \mathsf{T}\mathfrak{J}, \quad \mathsf{T}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$$

gibt.

Über Satz 2 hinaus kann man jetzt zeigen, *daß zwei bezügl.* $\mathfrak{T}$ *Spinor-verwandte Gitter* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{K}$ *bezügl.* $\mathfrak{T}$ *isomorph sind.* Zunächst folgt aus der Voraussetzung, daß $\mathfrak{J}' = T' \cap \mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}' = T' \cap \mathfrak{K}$ Spinor-verwandte Gitter in T' sind. Es gibt also für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ einen eigentlichen Automorphismus $\mathsf{T}'_\mathfrak{p}$ von $T'_\mathfrak{p}$, für welchen $\mathfrak{K}'_\mathfrak{p} = \mathsf{T}'_\mathfrak{p}\mathfrak{J}'_\mathfrak{p}$ gilt, wobei man annehmen darf, daß die Spinor-Normen der $\mathsf{T}'_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$ übereinstimmend gleich der Spinor-Norm eines eigentlichen Automorphismus von T' sind. Nach Satz 2, angewandt auf den Raum T', gibt es dann einen eigentlichen Automorphismus T' von T', mit welchem $\mathfrak{K}' = \mathsf{T}'\mathfrak{J}'$ gilt. Macht man T' durch die Festsetzung $\mathsf{T}'\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ zu einem Automorphismus von R, und ersetzt

man $\mathfrak{J}$ durch $\mathsf{T}\mathfrak{J}$, so darf hiernach ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\mathfrak{J}' = T' \wedge \mathfrak{J} = T' \wedge \mathfrak{R} \tag{75}$$

vorausgesetzt werden. Die Automorphismen $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$, für welche

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}, \quad \mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{T} = \mathfrak{T} \tag{76}$$

voraussetzungsgemäß gilt, sind wegen (75) Einheiten von $\mathfrak{J}'_\mathfrak{p}$.

Es gibt nun ein ganzes Ideal $\mathfrak{f}$ in k mit folgender Eigenschaft:

$$\mathfrak{J} < \mathfrak{J}' + T \wedge \mathfrak{J} < \mathfrak{f}\mathfrak{J}. \qquad (T = k(\mathfrak{T}))$$

Es sei

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1^{f_1} \dots \mathfrak{p}_m^{f_m}.$$

Ist E eine Einheit von $\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu}$ und

$$\mathsf{E} \equiv \mathsf{T}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod \mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu}, \tag{77}$$

so genügt $\mathsf{H}_{\mathfrak{p}_\mu} = \mathsf{E}^{-1}\mathsf{T}_{\mathfrak{p}_\mu}$ der Kongruenz

$$\mathsf{H}_{\mathfrak{p}_\mu} \equiv 1 \bmod \mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu}.$$

Macht man E und $\mathsf{H}_{\mathfrak{p}_\mu}$ durch die Festsetzung $\mathsf{E}\mathfrak{T} = \mathsf{H}_{\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ zu Automorphismen von $R_{\mathfrak{p}_\mu}$, so läßt $\mathsf{H}_{\mathfrak{p}_\mu}$ die Restklassen von $\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu} + T_{\mathfrak{p}_\mu} \wedge \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod (\mathfrak{f}\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}_\mu}$ fest und ist daher eine Einheit von $(\mathfrak{f}\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}_\mu}$ d. h. von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}$. Mithin gilt wegen (76)

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\mu} = \mathsf{E}\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\mu}. \tag{78}$$

Wegen der vorausgesetzten Spinor-Verwandtschaft von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ bezügl. $\mathfrak{T}$ kann man die $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ in (76) so ansetzen, daß ihre Spinor-Normen übereinstimmend für alle $\mathfrak{p}_\mu$ gleich der Spinor-Norm eines eigentlichen Automorphismus T' von T'' sind: $t(\mathsf{T}_{\mathfrak{p}_\mu}) = t(\mathsf{T}')$. Aus dem gleichen Grunde gibt es zu diesem T' für jedes von den $\mathfrak{p}_\mu$ verschiedene Primideal $\mathfrak{q}$ eine Einheit $\mathsf{E}_\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{J}'_\mathfrak{q}$ mit $t(\mathsf{E}_\mathfrak{q}) = t(\mathsf{T}')$. Es sei t eine beliebige Zahl aus der Quadratklasse $t(\mathsf{T}')$. Wir nehmen unter die $\mathfrak{p}_\mu$ noch die Teiler von Zähler und Nenner von t sowie alle $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ auf und setzen die Exponenten f_μ in (77) so groß an, wie es der Satz 7 verlangt, also eventuell größer als die Exponenten, mit denen sie in $\mathfrak{f}$ aufgehen. Jetzt wenden wir Satz 7 an, indem wir die dort vorkommenden Zahlen $t_{\mathfrak{p}_\mu}$ gleich t setzen. Es gibt demnach eine Einheit E von $\mathfrak{J}'$, welche sämtlichen Kongruenzen (77) genügt, und deren Spinor-Norm t ist. E wird durch $\mathsf{E}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ zu einem Automorphismus von R gemacht. Es gilt (78) für alle $\mathfrak{p}_\mu$, d. h. mindestens für alle Primteiler von $\mathfrak{f}$ sowie für alle $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Für die übrigen Primideale $\mathfrak{q}$ ist aber nach Voraussetzung $\mathfrak{J}_\mathfrak{q} = \mathfrak{J}'_\mathfrak{q} + T_\mathfrak{q} \wedge \mathfrak{J}_\mathfrak{q} = \mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ und daher ebenfalls $\mathfrak{R}_\mathfrak{q} = \mathsf{E}\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$. Folglich gilt $\mathfrak{R} = \mathsf{E}\mathfrak{J}$.

2. Auch Satz 8 läßt sich in gleichem Sinne übertragen, indem man sich auf Einheiten beschränkt, welche $\mathfrak{T}$ fest lassen: *Es mögen*

die in Nr. 1 formulierten Voraussetzungen über T' gelten. $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ seien zwei bezügl. $\mathfrak{T}$ verwandte Gitter. Dann sind die relativen Maße $u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}]$, $u^+[\mathfrak{K}, \mathfrak{T}]$ der $\mathfrak{T}$ fest lassenden Einheitengruppen $\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}}[\mathfrak{T}]$, $\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}}[\mathfrak{T}]$ gleich groß.

Zum Beweise werden die Gitter

$$\mathfrak{J}' = T' \wedge \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J}'' = T \wedge \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{K}' = T' \wedge \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{K}'' = T \wedge \mathfrak{K}$$

und

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}' + \mathfrak{J}'', \quad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$$

eingeführt. Eine $\mathfrak{T}$ fest lassende eigentliche automorphe Einheit von $\mathfrak{J}$ ist eine eigentliche automorphe Einheit von $\mathfrak{J}'$ und damit von $\mathfrak{J}_1$. Das Gleiche gilt für $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}}[\mathfrak{T}] < \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_1}[\mathfrak{T}], \quad \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}}[\mathfrak{T}] < \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}_1}[\mathfrak{T}].$$

Die Indizes $[\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_1}[\mathfrak{T}] : \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}}[\mathfrak{T}]]$, $[\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}_1}[\mathfrak{T}] : \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}}[\mathfrak{T}]]$ sind endlich. Es gibt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eine Potenz $f_{\mathfrak{p}}$ derart, daß eine Einheit $\mathsf{E}_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{J}_{1\mathfrak{p}}$, welche der Kongruenz

$$\mathsf{E}_{\mathfrak{p}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{J}_{1\mathfrak{p}}\, \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{J}_{1\mathfrak{p}}$$

genügt, gleichzeitig eine Einheit von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$ ist. Dabei braucht $f_{\mathfrak{p}}$ nur für endlich viele $\mathfrak{p}$ größer als Null zu sein (nämlich nur für die Primteiler des in Nr. 1 benutzten Ideals $\mathfrak{f}$), wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$. Die Einheiten der Gruppe $\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_1}[\mathfrak{T}]$ verteilen sich auf endlich viele Restklassen nach den Moduln $\mathfrak{J}_{1\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{p}_\mu^{f_{\mathfrak{p}_\mu}}/\mathfrak{J}_{1\mathfrak{p}_\mu}$. Die Anzahl dieser Restklassen ist gerade der Index $[\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_1}[\mathfrak{T}] : \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}}[\mathfrak{T}]]$.

Es sei nun

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}} = \mathsf{T}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}, \quad \mathsf{T}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{T} = \mathfrak{T} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Dann ist auch

$$\mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}} = \mathsf{T}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}. \tag{79}$$

$\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_m}$ seien beliebige eigentliche automorphe Einheiten von $\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_m}$. Ihnen entsprechen die Einheiten $\overline{\mathsf{E}}_{\mathfrak{p}_\mu} = \mathsf{T}_{\mathfrak{p}_\mu}\mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu}\mathsf{T}^{-1}_{\mathfrak{p}_\mu}$ von $\mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}_\mu}$. Wir fragen nach der Existenz zweier eigentlicher automorpher Einheiten E von $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathsf{E}}$ von $\mathfrak{K}$, welche den Kongruenzen

$$\mathsf{E} \equiv \mathsf{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod \mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{p}_\mu^{f_{\mathfrak{p}_\mu}}/\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}_\mu}, \quad \overline{\mathsf{E}} \equiv \overline{\mathsf{E}}_{\mathfrak{p}_\mu} \bmod \mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}_\mu}\mathfrak{p}_\mu^{f_{\mathfrak{p}_\mu}}/\mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}_\mu}$$

genügen. Nimmt man die Exponenten $f_{\mathfrak{p}_\mu}$ hinreichend groß an, so sind beide Kongruenzensysteme gleichzeitig lösbar oder unlösbar. Folglich

$$[\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}_1}[\mathfrak{T}] : \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{J}}[\mathfrak{T}]] = [\mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}_1}[\mathfrak{T}] : \mathfrak{U}^+_{\mathfrak{K}}[\mathfrak{T}]]. \tag{80}$$

Definitionsgemäß[28]) ist ferner

$$u^+[\mathfrak{J}_1, \mathfrak{T}] = u^+(\mathfrak{J}'), \quad u^+[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{T}] = u^+(\mathfrak{K}')$$

[28]) QFOG, Formel (24. 12).

und wegen (79) und Satz 8

$$u^+[\mathfrak{J}_1, \mathfrak{T}] = u^+[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{T}].$$

Also nach (80)

$$u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}] = u^+[\mathfrak{R}, \mathfrak{T}], \tag{81}$$

wie behauptet wurde.

§ 7.

Assoziierte Parallelotope.

1. Wie in der Einleitung angekundigt wurde, soll jetzt die Bedingung diskutiert werden, unter welcher zwei isomorphe Parallelotope $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ in R bezügl. $\mathfrak{J}$ assoziiert sind, d. h. daß

$$\mathfrak{T}_1 = \mathsf{E}\mathfrak{T}_2$$

mit einer automorphen Einheit E von $\mathfrak{J}$ gilt. Notwendig hierfür ist offenbar, daß $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ in $R_\mathfrak{p}$ bezügl. $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ assoziiert sind für jedes Primideal $\mathfrak{p}$. Trifft das Letztere zu, so wollen wir $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ *verwandt bezüglich* $\mathfrak{J}$ nennen.

Zwischen die Begriffe der Verwandtschaft und der Assoziiertheit bezügl. $\mathfrak{J}$ läßt sich wieder ein dritter Begriff einschalten. $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ seien zwei eigentlich isomorphe Parallelotope in R, d. h. es gebe einen eigentlichen Automorphismus P von R, so daß

$$\mathfrak{T}_2 = \mathsf{P}\mathfrak{T}_1 \tag{82}$$

ist. $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ seien bezügl. $\mathfrak{J}$ verwandt, d. h. es gelte mit automorphen Einheiten $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{T}_2 = \mathsf{E}_\mathfrak{p}\mathfrak{T}_1 \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}. \tag{83}$$

Wegen (82) und (83) gibt es dann $\mathfrak{T}_1$ fest lassende Automorphismen $\mathsf{P}_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$, für welche

$$\mathsf{P} = \mathsf{E}_\mathfrak{p}\mathsf{P}_\mathfrak{p} \tag{84}$$

gilt. Gibt es nun einen eigentlichen $\mathfrak{T}_1$ fest lassenden Automorphismus T von R sowie für jedes $\mathfrak{p}$ eine eigentliche $\mathfrak{T}_1$ fest lassende automorphe Einheit $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, so daß

$$t(\mathsf{T}) = t(\mathsf{H}_\mathfrak{p}\mathsf{P}_\mathfrak{p}) \qquad \text{für alle } \mathfrak{p} \tag{85}$$

gilt, so heißen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bezügl. $\mathfrak{J}$ Spinor-verwandt. Die Spinor-Verwandtschaft ist ersichtlich eine notwendige Bedingung für die Assoziiertheit bezügl. $\mathfrak{J}$. Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 9. *$\mathfrak{T}$ sei ein halbeinfaches Parallelotop in R, der zu $T = k(\mathfrak{T})$ senkrechte Teilraum T' von R sei indefinit und habe eine größere Dimension als 2. Dann sind zwei mit $\mathfrak{T}$ eigentlich isomorphe bezügl. eines Gitters $\mathfrak{J}$ von R Spinor-verwandte Parallelotope $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bezügl. $\mathfrak{J}$ assoziiert.*

Man bilde zum Beweise mit einem (82) leistenden P das Gitter

$$\mathfrak{R} = \mathsf{P}^{-1}\mathfrak{J}.$$

Es gelte (83) und (84). Dann ist

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathsf{P}_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}. \tag{86}$$

Die Spinor-Verwandtschaft von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bezügl. $\mathfrak{J}$ besagt nun gerade, daß die Gitter $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{R}$ Spinor-verwandt bezügl. $\mathfrak{T}_1$ sind. Nach § 6, Nr. 1 sind sie also bezügl. $\mathfrak{T}_1$ isomorph, d. h. es gibt einen eigentlichen Automorphismus T von R mit

$$\mathfrak{R} = \mathsf{T}\mathfrak{J}, \quad \mathsf{T}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_1.$$

Daraus folgt nach (86) die Existenz einer Einheit $\Theta_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ der Eigenschaft

$$\mathsf{P}_\mathfrak{p}^{-1}\Theta_\mathfrak{p} = \mathsf{T} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Nach (84) ist jetzt

$$\mathsf{P} = \mathsf{E}_\mathfrak{p}\Theta_\mathfrak{p}\mathsf{T}^{-1} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Also ist $\mathsf{E}_\mathfrak{p}\Theta_\mathfrak{p} = \mathsf{P}\mathsf{T}$ eine Einheit von $\mathfrak{J}$ und wegen (82)

$$\mathsf{P}\mathsf{T}\mathfrak{T}_1 = \mathsf{P}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2,$$

wie behauptet wurde.

2. Ähnlich beweist man den folgenden

Satz 10. *Gelten wieder die Voraussetzungen von Satz 9 über* $\mathfrak{T}$, *so sind für zwei mit* $\mathfrak{T}$ *eigentlich isomorphe bezügl.* $\mathfrak{J}$ *verwandte Parallelotope* $\mathfrak{T}_1$ *und* $\mathfrak{T}_2$ *die relativen Gruppenmaße* $u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_1]$ *und* $u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_2]$ *gleich.*

Man braucht nur das Gitter $\mathfrak{R} = \mathsf{P}^{-1}\mathfrak{J}$ einzuführen, wo P der Gleichung (82) genügt. Dann kann das Resultat (81) herangezogen werden. Es ist aber definitionsgemäß [29])

$$u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_2] = u^+[\mathfrak{J}, \mathsf{P}\mathfrak{T}_1] = u^+[\mathsf{P}^{-1}\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_1] = u^+[\mathfrak{R}, \mathfrak{T}_1] = u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_1].$$

3. Wir betrachten jetzt die Parallelotope $\mathfrak{T}_1, \ldots$ in $\mathfrak{J}$, welche mit $\mathfrak{T}$ eigentlich isomorph sind. $\overline{\mathfrak{J}}$ sei ein mit $\mathfrak{J}$ verwandtes Gitter, und zwar gelte

$$\overline{\mathfrak{J}}_\mathfrak{p} = \mathsf{T}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}, \tag{87}$$

wobei die $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ Automorphismen von $R_\mathfrak{p}$ sind. Es soll eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Klassen solcher bezügl. $\mathfrak{J}$ assoziierter Parallelotope in $\mathfrak{J}$ und den Klassen von bezügl. $\overline{\mathfrak{J}}$ assoziierter Parallelotope in $\overline{\mathfrak{J}}$ angegeben werden.

Ein $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{J}$ sei vorgelegt. Wegen der Voraussetzungen über den zu $k(\mathfrak{T})$ senkrechten Teilraum T'' von R gibt es zu jedem $\mathsf{T}_\mathfrak{p}$ in (87)

[29]) QFOG, § 16, Nr. 4.

einen $\mathfrak{T}_1$ fest lassenden Automorphismus $\Sigma_\mathfrak{p}$ von $R_\mathfrak{p}$ so, daß

$$t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_\mathfrak{p}) = 1 \qquad \text{für alle } \mathfrak{p} \tag{88}$$

ist. Durch

$$\mathfrak{J} = R \cap \Sigma_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathsf{T}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\,\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{p}_1} \cap \Sigma_{\mathfrak{p}_2}^{-1}\mathsf{T}_{\mathfrak{p}_2}^{-1}\,\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{p}_2} \cap \ldots \tag{89}$$

(die $\mathfrak{p}_a$ durchlaufen alle Primideale) wird ein Gitter $\mathfrak{J}$ in R mit

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \Sigma_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{-1}\,\overline{\mathfrak{J}}_\mathfrak{p}$$

definiert. Es ist wegen (88) mit $\overline{\mathfrak{J}}$ Spinor-verwandt. Nach Satz 2 existiert dann ein Automorphismus P von R so, daß $\mathfrak{J} = \mathsf{P}^{-1}\overline{\mathfrak{J}}$ ist. Folglich gibt es Einheiten $\mathsf{E}_\mathfrak{p}$ von $\overline{\mathfrak{J}}$ mit der Eigenschaft

$$\mathsf{E}_\mathfrak{p}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_\mathfrak{p} = \mathsf{P} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Jetzt ist

$$\overline{\mathfrak{T}}_1 = \mathsf{P}\,\mathfrak{T}_1 \tag{90}$$

ein mit $\mathfrak{T}_1$ eigentlich isomorphes und in $\overline{\mathfrak{J}}$ enthaltenes Parallelotop.

Es sei mit einer Einheit H von $\mathfrak{J}$:

$$\mathfrak{T}_2 = \mathsf{H}\,\mathfrak{T}_1 .$$

Die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ vermöge (90) zugeordneten Parallelotope in $\overline{\mathfrak{J}}$ seien

$$\overline{\mathfrak{T}}_1 = \mathsf{P}_1\,\mathfrak{T}_1 , \quad \overline{\mathfrak{T}}_2 = \mathsf{P}_2\,\mathfrak{T}_2 \tag{91}$$

mit

$$\mathsf{P}_1 = \mathsf{E}_{1\mathfrak{p}}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_{1\mathfrak{p}} , \quad \mathsf{P}_2 = \mathsf{E}_{2\mathfrak{p}}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_{2\mathfrak{p}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}, \tag{92}$$

wobei stets $t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_{1\mathfrak{p}}) = t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_{2\mathfrak{p}}) = 1$ gilt; $\mathsf{E}_{1\mathfrak{p}}$, $\mathsf{E}_{2\mathfrak{p}}$ sind Einheiten von $\overline{\mathfrak{J}}_\mathfrak{p}$, und $\Sigma_{1\mathfrak{p}}$, $\Sigma_{2\mathfrak{p}}$ lassen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ fest. Aus (91), (92) folgt

$$\overline{\mathfrak{T}}_2 = \mathsf{E}_\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{T}}_1 \qquad \text{für alle } \mathfrak{p};$$

dabei sind

$$\mathsf{E}_\mathfrak{p} = \mathsf{E}_{2\mathfrak{p}}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\mathsf{H}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathsf{E}_{1\mathfrak{p}}^{-1}$$

Einheiten von $\overline{\mathfrak{J}}_\mathfrak{p}$. Also $\overline{\mathfrak{T}}_1$ und $\overline{\mathfrak{T}}_2$ sind wenigstens bezügl. $\overline{\mathfrak{J}}$ verwandt. Es gilt ferner

$$\overline{\mathfrak{T}}_2 = \mathsf{P}\,\overline{\mathfrak{T}}_1$$

und

$$\mathsf{P} = \mathsf{E}_\mathfrak{p}\,\mathsf{P}_\mathfrak{p}$$

mit

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_2\,\mathsf{H}\,\mathsf{P}_1^{-1} , \quad \mathsf{P}_\mathfrak{p} = \mathsf{E}_{1\mathfrak{p}}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\mathsf{H}^{-1}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathsf{E}_{2\mathfrak{p}}^{-1}\,\mathsf{E}_{2\mathfrak{p}}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_{2\mathfrak{p}}\,\mathsf{H}\,\Sigma_{1\mathfrak{p}}^{-1}\,\mathsf{T}_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathsf{E}_{1\mathfrak{p}}^{-1} ,$$

woraus man sofort wegen $t(\mathsf{T}_\mathfrak{p}\,\Sigma_{i\mathfrak{p}}) = 1$ $(i = 1, 2)$

$$t(\mathsf{P}_\mathfrak{p}) = 1 \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}$$

entnimmt. Mithin sind $\overline{\mathfrak{T}}_1$ und $\overline{\mathfrak{T}}_2$ sogar bezügl. $\overline{\mathfrak{J}}$ Spinor-verwandt und daher nach Satz 9 bezügl. $\overline{\mathfrak{J}}$ assoziiert.

In gleicher Weise folgt aus der Assoziiertheit von $\overline{\mathfrak{T}}_1$, $\overline{\mathfrak{T}}_2$ bezügl. $\overline{\mathfrak{J}}$ die von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ bezügl. $\mathfrak{J}$. Durch (90) wird also eine eineindeutige Abbildung der Klassen bezügl. $\mathfrak{J}$ assoziierter mit $\mathfrak{T}$ eigentlich isomorpher Parallelotope in $\mathfrak{J}$ auf die Klassen bezügl. $\overline{\mathfrak{J}}$ assoziierter mit $\mathfrak{T}$ eigentlich isomorpher Parallelotope in $\overline{\mathfrak{J}}$ definiert.

Die relativen Gruppenmaße $u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_1]$ sind nach Satz 10 Invarianten der Klassen bezügl. $\mathfrak{J}$ assoziierter $\mathfrak{T}_1$. Es gilt noch

$$u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_1] = u^+[\overline{\mathfrak{J}}, \overline{\mathfrak{T}}_1]. \tag{93}$$

Laut Definition der relativen Maße[29]) ist nämlich

$$u^+[\overline{\mathfrak{J}}, \mathsf{P}\mathfrak{T}_1] = u^+[\mathsf{P}^{-1}\overline{\mathfrak{J}}, \mathfrak{T}_1].$$

$\mathsf{P}^{-1}\overline{\mathfrak{J}}$ ist das durch (89) eingeführte mit $\overline{\mathfrak{J}}$ isomorphe und daher mit $\mathfrak{J}$ verwandte Gitter $\mathfrak{J}$. Nach (81) ist

$$u^+[\overline{\mathfrak{J}}, \mathsf{P}\mathfrak{T}_1] = u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_1] = u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{T}_1],$$

womit (93) bewiesen ist. (93) ist aber die Gleichung (6) in Satz 4, dessen Beweis hiermit vollständig erbracht ist.

(Eingegangen am 1. September 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 2, S. 253–268 (1952).

Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform.

Von

K. P. Grotemeyer in Göttingen.

Zwei isometrisch aufeinander abgebildete Eiflächen sind bis auf eine Bewegung oder Spiegelung im dreidimensionalen euklidischen Raum identisch. Dieser Identitätssatz wurde von St. Cohn-Vossen in den Göttinger Nachrichten 1927 (S. 125—135) zuerst bewiesen. Ein kürzerer Beweis stammt von G. Herglotz in den Abhandlungen des Hamburger Math. Seminars, Bd. 15, 1947, S. 102 ff. Mit Hilfe der dort entwickelten Methode sollen in der vorliegenden Arbeit ähnliche Identitätssätze für positiv gekrümmte Flächenstücke mit Rändern bewiesen werden.

Wie auch der Identitätssatz für Eiflächen als Eindeutigkeitssatz für das von H. Weyl stammende Existenzproblem, der Existenz einer Eifläche zu vorgegebener erster Fundamentalform mit einer überall positiven Gauss'schen Krümmung, aufgefaßt werden kann, so lassen sich auch die Identitätssätze für Flächen mit Rändern als Eindeutigkeitssätze zu gewissen Existenzsätzen auffassen. Die Eiflächen, wie auch die hier untersuchten positiv gekrümmten Flächenstücke mit Rändern (die gewisse Eigenschaften haben) sind also im dreidimensionalen euklidischen Raum in ihrer „Struktur" schon durch die erste Fundamentalform festgelegt. Die Identitätssätze lassen sich natürlich auch zu Starrheitsaussagen gegenüber endlichen Verbiegungen spezialisieren.

Da bei allen Rechnungen der invariante Differentialkalkül benutzt wird, erschien es notwendig, zunächst eine kurze Zusammenstellung der Grundformeln der euklidischen Flächentheorie in invarianter Form zu geben. Wenn $A^{\cdots}_{\cdots}$ ein beliebiger Tensor ist, so bedeutet

$A^{\cdots}_{\cdots}{}_{|i}$ kovariante Ableitung nach der i-ten Variablen,

$A^{\cdots}_{\cdots}{}_{,i}$ partielle Ableitung nach der i-ten Variablen.

Ist A ein Tensor nullter Stufe, so fallen beide Differentiationsprozesse zusammen, und wir lassen die Striche weg.

I. Zusammenfassung der Grundgleichungen der euklidischen Flächentheorie.

Es sei $\mathfrak{x}(u^i)$ der dreimal stetig differenzierbare Ortsvektor eines Flächenstückes im dreidimensionalen euklidischen Raum. Wir be-

zeichnen

$$\xi = \frac{[\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2]}{|[\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2]|} \tag{1}$$

als den Normaleneinheitsvektor des Flächenstückes. Als Grundtensoren der Flächentheorie werden folgende Größen bezeichnet:

$$g_{ik} = (\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k); \qquad B_{ik} = (\mathfrak{\xi}\, \mathfrak{x}_{i\,k}); \qquad \varepsilon_{ik} = (\mathfrak{\xi}\, \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k). \tag{2}$$

g_{ik} ist der sog. Maßtensor. Das „Herunter-" und „Heraufziehen" von Indizes soll durch ihn geschehen. Die kovarianten Ableitungen beziehen sich auf die aus g_{ik} gebildeten Christoffelgrößen. ε_{ik} wird als Diskriminantentensor bezeichnet, da $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g}$; $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ ist, wobei $||g_{ik}|| = g$ gesetzt ist. Weiter hat er folgende Eigenschaften:

$$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}; \qquad \varepsilon^{ik}\,\varepsilon_{lk} = \delta^i_l; \qquad \varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{lm} = g_{il}\,g_{km} - g_{im}\,g_{kl}. \tag{3}$$

Wenn c_{ik} ein beliebiger Tensor ist, dann definieren wir

$$\underline{c}^{ik} = \varepsilon^{i\alpha}\,\varepsilon^{k\beta}\,c_{\alpha\beta} \tag{4}$$

und nennen $\underline{c}^{ik}$ den zu c_{ik} „bezüglich g_{ik}" adjungierten Tensor. Es gilt nämlich

$$\underline{c}^{ik}\,c_{kl} = \frac{|c_{ik}|}{g}\,\delta^i_l. \tag{5}$$

Aus (3c) ergibt sich

$$\underline{c}^{ik} = c^l_{l\cdot}\,g^{ik} - c^{ik}; \qquad c^l_{l\cdot} = \underline{c}^{\nu}_{\nu\cdot}. \tag{6}$$

Falls $||c_{ik}|| \neq 0$, können wir den zu c_{ik} inversen Tensor schreiben als

$$\overline{c}^{ik} = \frac{g}{|c_{ik}|}\,\underline{c}^{ik}, \tag{7}$$

wie man aus (5) erkennt.

Es sei noch der Tensor des sphärischen Bildes angegeben:

$$e_{ik} = (\xi_i\, \xi_k). \tag{8}$$

Zwischen g_{ik}; B_{ik}; e_{ik} besteht der bekannte Zusammenhang:

$$K\,g_{ik} - 2\,H\,B_{ik} + e_{ik} = 0; \tag{9}$$

darin ist

$$K = \tfrac{1}{2}\,B_{ik}\,\underline{B}^{ik}; \qquad 2\,H = B^l_{l\cdot}. \tag{10}$$

K ist die Gauss'sche und H die mittlere Krümmung.

Auf unserer Fläche bilden die drei linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_i$; $\mathfrak{\xi}$ eine räumliche Basis. Die Ableitungsgleichungen haben folgende Form:

$$\mathfrak{x}_{i\,k} = B_{ik}\,\mathfrak{\xi}; \qquad \mathfrak{\xi}_i = -B^l_{i\cdot}\,\mathfrak{x}_l. \tag{11}$$

Die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen liefern das Theorema egregium.

$$K = \tfrac{1}{4} R_{iklm}\, \varepsilon^{ik}\, \varepsilon^{lm} \tag{12}$$

und die Codazzigleichungen

$$B_{ik}{}_{|l}\, \varepsilon^{kl} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \underline{B}^{ik}{}_{||k} = 0. \tag{13}$$

In der hier gewählten Bezeichnungsweise lautet der Fundamentalsatz der Differentialgeometrie:

In einem Bereich $\mathfrak{B}$ der u^i-Ebene seien die Funktionen

$$g_{ik} = g_{ki}; \qquad B_{ik} = B_{ki}$$

mit den Bedingungen

$$\frac{|B_{ik}|}{g} = \frac{1}{4} R_{iklm}\, \varepsilon^{ik}\, \varepsilon^{lm}; \qquad B_{ik}{}_{|l}\, \varepsilon^{kl} = 0$$

vorgegeben, dabei seien die g_{ik} zweimal und die B_{ik} einmal stetig differenzierbar, so ist dadurch eine und bis auf orthogonale Transformationen nur eine Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum bestimmt, die die g_{ik} als erste und die B_{ik} als zweite Fundamentalform besitzt.

Für manche Rechnung sind noch folgende Formeln bequem:

$$[\mathfrak{x}_i\, \mathfrak{x}_k] = \varepsilon_{ik}\, \xi; \qquad [\xi\, \mathfrak{x}_k] = \varepsilon_k^l .\, \mathfrak{x}_l . \tag{14}$$

Man erhält sie sofort aus einem Ansatz der Form

$$[\mathfrak{x}_i\, \mathfrak{x}_k] = N_{ik}^l .\, \mathfrak{x}_l + S_{ik}\, \xi.$$

Durch Angabe einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u^i(s)$ mit $\dot{u}^i(s) \not\equiv 0$ wird auf der Fläche eine Kurve festgelegt.

Es möge s die Bogenlänge der Kurve sein:

$$g_{ik}\, \dot{u}^i\, \dot{u}^k = 1.$$

Der Vektor $\dot{u}^i$ heißt intrinseker Tangentenvektor und $n_k = \varepsilon_{ik}\, \dot{u}^i$ heißt intrinseker Normalenvektor der Kurve. Wegen

$$g_{ik}\, \dot{u}^i\, n^k = 0; \qquad \varepsilon_{ik}\, \dot{u}^i\, n^k = 1$$

sind sie orthogonal und bilden ein Rechtssystem beim Blick in die positive Flächennormalenrichtung. Die Tangentenebenen bilden längs $u^i(s)$ einen „Streifen". Für diesen Flächenstreifen wählen wir die drei linear unabhängigen Vektoren

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_i\, \dot{u}^i; \qquad \eta = \mathfrak{x}_i\, n^i; \qquad \xi\,(u^i(s))$$

als begleitendes Dreibein.

$\dot{\mathfrak{x}}$; η; ξ sind orthogonal und normiert. Die zugehörigen Ableitungsgleichungen lauten (der Punkt bedeutet Ableitung nach der Bogenlänge s):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{x}} &= \quad c\,\eta - b\,\xi & a &= -(\dot{\xi}\,\eta) \\ \dot{\eta} &= -c\,\dot{\mathfrak{x}} + a\,\xi & b &= -(\xi\,\ddot{\mathfrak{x}}) \\ \dot{\xi} &= \quad b\,\dot{\mathfrak{x}} - a\,\eta & c &= -(\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\eta}). \end{aligned} \tag{16}$$

a heißt geodätische Windung, b ist die Normalkrümmung und c ist die geodätische Krümmung der Kurve $u^i(s)$. Für die drei „Streifeninvarianten" gelten die Darstellungen

$$(17) \qquad a(s) = B_{ik}\,\dot{u}^i\,n^k; \quad b(s) = -B_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k; \quad c(s) = g_{ik}\,n^i\,\frac{\delta\,\dot{u}^k}{d\,S},$$

wobei $\frac{\delta}{dS}$ die kovariante Ableitung längs $u^i(s)$ bedeutet: $\frac{\delta}{dS} = \dot{u}^i \nabla_i$. Zwischen den „Ortsinvarianten" K; H und den „Richtungsinvarianten" a; b besteht die Beziehung

$$(18) \qquad a^2 = -\{K + 2Hb + b^2\}.$$

Es sollen noch die Integralsätze von Gauss und Stokes angegeben werden:

Es sei $u^i(s)$ eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve auf der Fläche. Die Normale n^k sei nach innen gerichtet. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $c^k(u^l)$ im Inneren von $u^i(s)$ gilt dann

$$(19) \qquad \begin{aligned} \int\!\!\int^{(G)} c^k{}_{\|k}\,do &= -\oint c^k\,n_k\,ds \\ \int\!\!\int^{(G)} \varepsilon^{kl} c_{l\,\|k}\,do &= \oint c_l\,\dot{u}^l\,ds. \end{aligned}$$

G ist das von $u^i(s)$ begrenzte Gebiet.

Die eindeutige Bestimmung von Flächenstücken durch die erste Fundamentalform.

Die Struktur einer infinitesimal unverbiegbaren Fläche liegt im dreidimensionalen euklidischen Raum bis auf Größen zweiter Ordnung schon durch die Metrik g_{ik} fest.

In diesem Teil sollen allgemein Flächenklassen untersucht werden, deren Struktur im dreidimensionalen Raum schon eindeutig durch die g_{ik} bestimmt ist. Das soll heißen: Zwei Flächen der Klasse mit demselben g_{ik} sind modulo der orthogonalen Transformationsgruppe identisch.

Zunächst werden die Begriffe Isometrie und endliche Verbiegbarkeit definiert.

Definition von Isometrie und endlicher Verbiegung.

Definition (Isometrie).

Zwei Flächenstücke $\mathfrak{x}(u^i)$; $\mathfrak{y}(v^k)$ heißen isometrisch, wenn es eine Abbildung $u^i = t^i(v^k)$; $\left\|\frac{\partial u^i}{\partial v^k}\right\| \neq 0$ gibt derart, daß

$$g_{ik}(\mathfrak{x}) = g_{ik}(\mathfrak{y})$$

wird, d. h. die Maßtensoren beider Flächen stimmen überein.

Es soll jetzt noch die endliche Verbiegung definiert werden:

Definition. Zwei isometrische, 2-mal stetig differenzierbare Flächenstücke $\mathfrak{x}(u^k)$; $\mathfrak{y}(u^k)$, die auf ein gemeinsames, die Isometrie vermittelndes Parametersystem bezogen sind, heißen ineinander verbiegbar, wenn es eine Flächenschar $\mathfrak{z}(u^k; t)$; $0 \leqq t \leqq 1$ gibt, die zweimal nach den u^k und einmal nach dem t stetig differenzierbar ist, in der alle Flächen isometrisch zueinander sind und

$$\mathfrak{z}(u^k; 0) = \mathfrak{x}(u^k); \qquad \mathfrak{z}(u^k; 1) = \mathfrak{y}(u^k)$$

ist.

In der älteren Literatur werden gewöhnlich isometrische Flächen ineinander verbiegbar genannt. Ob dann wirklich die eine Fläche durch eine stetige Verbiegung in die andere überführbar ist, ist eine andere Frage. In der Tat ist dieses im allgemeinen nicht der Fall. Es gibt nämlich Größen, die gegenüber der eben definierten stetigen Verbiegung invariant sind (Ordnung eines Sattelpunktes)[1]), doch nicht gegenüber isometrischer Abbildung. Daher sind beide Definitionen wirklich verschieden.

II. Die Eigenschaften der Größen A_{ik}.

Es seien $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ zwei dreimal stetig differenzierbare Flächenstücke, die isometrisch aufeinander abgebildet sind. Die Isometrie werde durch die beiden Flächen gemeinsamen Parameter u^k vermittelt. Zu den Flächen mögen die folgenden Wertepaare gehören:

$$\begin{array}{llllllll} \mathfrak{F} & : \mathfrak{x}(u^k); & \xi(u^k); & g_{ik}; & \varepsilon_{ik}; & B_{ik}; & K; & 2H \\ \mathfrak{F}^* & : \mathfrak{x}^*(u^k); & \xi^*(u^k); & g_{ik}; & \varepsilon_{ik}; & B^*_{ik}; & K; & 2H^*. \end{array}$$

Wegen der isometrischen Abbildung stimmen die Größen beider Flächen, die nur von g_{ik} abhängen, überein.

Wenn es nun gelingt zu zeigen, daß für die Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ auch die zweiten Fundamentalformen

$$B_{ik} = B^*_{ik}$$

übereinstimmen, dann sind die Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ nach dem Fundamentalsatz der Differentialgeometrie entweder kongruent oder symmetrisch. Sie sind dann identisch modulo den orthogonalen Transformationen des euklidischen Raumes.

Wir führen nun folgenden Tensor ein:

$$\begin{aligned} A_{ik} &= B_{ik} - B^*_{ik} \\ \underline{A}^{ik} &= \underline{B}^{ik} - \underline{B}^{*ik}. \end{aligned} \tag{1}$$

[1]) H. Schilt, Über isolierte Nullstellen der Flächenkrümmungen und einige Verbiegbarkeitssätze. Comp. Math. 5, 1938, S. 239 ff.

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der ersten durch Überschieben mit $\varepsilon^{il}\varepsilon^{km}$ nach (I, 4).

$$J = B_{ik}\underline{B}^{*ik} = \underline{B}^{ik}B^{*}_{ik} \tag{2}$$

ist eine Invariante beider Flächen. Das Verschwinden von J bedeutet geometrisch, daß auf den isometrischen Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ den Asymptotenlinien auf der einen Fläche ein konjugiertes System auf der anderen entspricht. Nach (I, 5) und (I, 10) gilt

$$2\frac{|A_{ik}|}{g} = (B_{ik} - B^{*}_{ik})(\underline{B}^{ik} - \underline{B}^{*ik}) = 2\{2K - J\},$$

daher ist

$$\frac{|A_{ik}|}{g} = \{2K - J\}. \tag{3}$$

Wir bilden jetzt

$$\underline{B}^{ik}A_{ik} = B_{ik}\underline{A}^{ik} = 2K - J,$$

also wegen (3)

$$\frac{|A_{ik}|}{g} = B_{ik}\underline{A}^{ik} = A_{ik}\underline{B}^{ik}. \tag{4}$$

Für die beiden Flächen sind (nach (I, 13)) die Codazzigleichungen erfüllt:

$$\underline{B}^{ik}_{|k} = 0; \qquad \underline{B}^{*ik}_{|k} = 0.$$

Zusammengefaßt:

$$\underline{A}^{ik}_{|k} = 0. \tag{5}$$

Nun soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1. *In den Gebieten der isometrischen Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$, in denen $K > 0$ ist, gilt*

$$||A_{ik}|| \leqq 0.$$

Beweis. Es ist

$$2\frac{|B_{ik} - sB^{*}_{ik}|}{g} = 2\{K - Js + s^2K\}.$$

Setzen wir die rechte Seite gleich Null, so muß die quadratische Gleichung stets reelle, positive Nullstellen haben, da wegen $K > 0$ beide Tensoren B_{ik} und B^{*}_{ik} positiv definit[2]) sind. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung lautet

$$J^2 - 4K^2.$$

Da die Nullstellen reell sind, muß $J^2 - 4K^2 \geqq 0$ sein. Die Nullstellen sind positiv, also auch ihre Summe: $J \geqq 0$. Aus $K > 0$; $J \geqq 0$ und $J^2 - 4K^2 \geqq 0$ folgt aber $J - 2K \geqq 0$ und nach (3) auch $||A_{ik}|| \leqq 0$.

[2]) Aus $K > 0$ folgt zunächst nur, daß die Tensoren B_{ik}; B^{*}_{ik} definit sind. Durch eine Spiegelung läßt es sich stets erreichen, daß sie positiv definit werden. Bei $K > 0$ sei dieses fortan vorausgesetzt.

Satz 2. *In den Gebieten der isometrischen Flächen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}^*$, *in denen* $K > 0$ *ist, folgt aus* $||A_{ik}|| = 0$ *die Gleichung*

$$A_{ik} = 0.$$

Beweis. $||A_{ik}|| = 0$ liefert die Zerlegung $A_{ik} = a_i a_k$. Nun ist $\underline{B}^{ik} A_{ik} = 0$, also $\underline{B}^{ik} A_{ik} = \underline{B}^{ik} a_i a_k = 0$. Wegen $K > 0$ ist diese Form positiv definit. Es müssen daher die $a_i = 0$ sein, d. h. aber $A_{ik} = 0$.

Die eben bewiesenen Sätze 1 und 2 lassen sich auch etwas mehr geometrisch interpretieren:

Jeder Flächenrichtung $\dot{u}^i$ mit $g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 1$ auf $\mathfrak{F}$ entspricht eine Richtung auf $\mathfrak{F}^*$. Es sei die Voraussetzung $K > 0$ erfüllt. Durch $A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$ wird wegen $||A_{ik}|| \leqq 0$ auf jeder der beiden Flächen ein reelles Kurvennetz festgelegt. Schließt man den Fall $||A_{ik}|| = 0$ zunächst aus, so gehen durch jeden Punkt der betrachteten Gebiete genau zwei Netzkurven. Welche Eigenschaften haben nun in einem Punkt diese beiden Richtungen?

$$0 = A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = B_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k - B^*_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = - b(s) + b^*(s).$$

In den Richtungen sind also die Normalkrümmungen gleich. Nach Satz 2 lehrt $||A_{ik}|| = 0$, daß dort die Normalkrümmungen in jeder Richtung übereinstimmen. Die geometrische Bedeutung des Kurvennetzes $\varepsilon^l_k A_{li} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$ (Netz der Winkelhalbierenden von $A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$, und daher reell) liegt auf der Hand:

$$0 = A_{li} \varepsilon^l_k \dot{u}^i \dot{u}^k = A_{li} \dot{u}^i n^l = a(s) - a^*(s).$$

Wir wenden uns jetzt wieder den allgemeinen Eigenschaften der A_{ik} zu. Als nächstes ergibt sich die Frage: Was kann man im Fall $K = 0$ aussagen über die A_{ik}?

Satz 3[3]). *Falls* $K = 0$ *auf den isometrischen Flächen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}^*$ *ist, so gilt*

$$B_{ik} = \mu_i \mu_k; \qquad B^*_{ik} = \mu^*_i \mu^*_k$$

mit reellen μ_i; μ^*_k. *Weiter gilt*

$$\frac{|A_{ik}|}{g} = - (\varepsilon^{ik} \mu_i \mu^*_k)^2.$$

Beweis. Nach (3), (2) gilt im Falle $K = 0$: $\frac{|A_{ik}|}{g} = - J$.

$$J = B^*_{ik} \underline{B}^{ik} = \mu_i \mu_k \varepsilon^{il} \varepsilon^{kr} \mu^*_l \mu^*_r = (\varepsilon^{ik} \mu_i \mu^*_k)^2.$$

Es ist also auch im Falle $K = 0$ die Determinante $||A_{ik}|| \leqq 0$.

Satz 4. *Falls* $K = 0$ *auf den isometrischen Flächen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}^*$ *ist, so folgt aus* $||A_{ik}|| = 0$ *die Gleichung*

$$B_{ik} = \lambda B^*_{ik} \qquad \lambda \geqq 0.$$

[3]) Flachpunkte (d. h. Punkte mit $B_{ik} = 0$) seien ausgeschlossen.

Beweis. $||A_{ik}|| = 0$ bei $K = 0$ liefert nach Satz 3

$$\mu_i = \varrho\, \mu_i^*: \qquad B_{ik} = \varrho^2 B_{ik}^*.$$

Wenn man noch nachweisen kann, daß $H = H^*$ ist in Punkten mit $K = 0$ und $||A_{ik}|| = 0$, dann gilt dort

$$B_{ik} = B_{ik}^*,$$

da

$$2H = g^{ik} B_{ik} = \lambda\, g^{ik} B_{ik}^* = \lambda\, 2H^*$$

ist.

Sogar wenn man für eine Richtung u^i in dem parabolischen Punkt

$$b(s) = b^*(s) \neq 0 \quad \text{oder} \quad a(s) = a^*(s) \neq 0$$

nachweisen kann, so folgt daraus schon $\lambda = 1$, d. h. $B_{ik} = B_{ik}^*$.

Es sei noch eine Bemerkung über die Invariante J gemacht. Falls $J = 0$ ist, für zwei isometrisch aufeinander abgebildete Flächen, so können sie nur dann kongruent oder symmetrisch sein, falls $K = 0$ ist. Dieses folgt sofort aus (3).

III. Integralsätze für die Kongruenzsätze.

Zwei isometrische Flächenstücke $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ sind kongruent oder symmetrisch, wenn wir für sie $A_{ik} = 0$ nachweisen können. Unter gewissen Voraussetzungen folgt diese Gleichung nach Satz 2 und 4 schon aus dem Verschwinden von $||A_{ik}||$. Um nun $||A_{ik}|| = 0$ nachzuweisen, wird man Integralformeln benutzen. Diese Integralformeln müssen dann so beschaffen sein, daß sie unter einem Oberflächenintegral die Invariante $\frac{||A_{ik}||}{g}$ aufweisen.

Zunächst beschaffen wir uns eine Grundformel, aus der wir alle Integralsätze ableiten:

Die Gleichungen (II, 4) und (II, 5) liefern

$$\frac{||A_{ik}||}{g} = \underline{A}^{ik} B_{ik} \quad \text{und} \quad \underline{A}^{ik}{}_{|k} = 0. \tag{1}$$

Weiter gilt die Gauss'sche Ableitungsgleichung (I, 11)

$$\mathfrak{x}_{i\,k} = B_{ik}\, \mathfrak{x}. \tag{2}$$

Alle drei liefern unsere Grundformel

$$(A^{ik}\, \mathfrak{x}_i)_{|k} = \frac{||A_{ik}||}{g}\, \mathfrak{x}. \tag{3}$$

Der Gauss'sche Integralsatz liefert sofort die erste Integralformel der gewünschten Art:

$$\int\!\!\int \frac{||A_{ik}||}{g}\, \mathfrak{x}\, do = -\oint \underline{A}^{ik}\, \mathfrak{x}_i\, n_k\, ds. \tag{4}$$

Diese Gleichung darf natürlich noch mit einem konstanten Vektor multipliziert werden.

Multiplizieren wir jetzt die Grundformel (3) mit dem Ortsvektor

$$(\underline{A}^{ik}\,\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{x})_{,k} - \underline{A}^{ik}\,g_{ik} = \frac{|A_{ik}|}{g}\,P.$$

Darin ist $P = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{\xi})$ die Stützfunktion der Fläche. Nach Gleichung (I, 6), (I, 10) findet man

$$\underline{A}^{ik}\,g_{ik} = A^{ik}\,g_{ik} = 2H - 2H^*.$$

Daher liefert die Integration die zweite Integralformel

$$(5)\qquad \int\!\!\int \frac{|A_{ik}|}{g}\,P\,do = -\int\!\!\int \{2H - 2H^*\}\,do - \oint \underline{A}^{ik}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_i)\,n_k\,ds.$$

Es sei noch eine dritte Integralformel angegeben:

$$(6)\qquad \int\!\!\int \frac{|A_{ik}|}{g}\,\hat{P}\,do = -\int\!\!\int (\underline{A}^{ik}(\hat{\mathfrak{x}}_i\,\mathfrak{x}_k)\,do - \oint \underline{A}^{ik}(\hat{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}_i)\,n_k\,ds;$$

dabei bedeutet

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{e}\,\mathfrak{x})\,\mathfrak{e} = |\mathfrak{e}|\mathfrak{x}\,\mathfrak{e}|| \qquad \mathfrak{e} = \text{const},\ \mathfrak{e}^2 = 1.$$

$\hat{\mathfrak{x}}$ ist der in Richtung $\mathfrak{e}$ projizierte Vektor $\mathfrak{x}$. $\hat{P} = (\mathfrak{\xi}\,\hat{\mathfrak{x}})$. Nun gilt

$$(\hat{\mathfrak{x}}_i\,\hat{\mathfrak{x}}_k) = (\mathfrak{x}_i\,\hat{\mathfrak{x}}_k).$$

Durch Integration folgt die Formel wieder aus der Grundformel nach Multiplikation mit $\hat{\mathfrak{x}}$, d. h. aus

$$(\underline{A}^{ik}\,\mathfrak{x}_i)_{,k}\,\hat{\mathfrak{x}} = (\underline{A}^{ik}\,(\mathfrak{x}_i\,\hat{\mathfrak{x}}))_{,k} - \underline{A}^{ik}\,(\mathfrak{x}_i\,\hat{\mathfrak{x}}_k) = \frac{|A_{ik}|}{g}\,\hat{P}.$$

Aus Gleichung (5) kann man noch leicht eine andere Formel gewinnen. Wir vertauschen in (5) die gesternten Größen mit den ungesternten. Dabei geht $|A_{ik}| = |B_{ik} - B^*_{ik}|$ in sich über, und wir erhalten

$$(5^*)\qquad \int\!\!\int \frac{|A_{ik}|}{g}\,P^*\,do = +\int\!\!\int \{2H - 2H^*\}\,do + \oint \underline{A}^{ik}\,(\mathfrak{x}^*\,\mathfrak{x}^*_i)\,n_k\,ds.$$

Nun addieren wir (5) und (5*) und finden

$$(7)\qquad \int\!\!\int \frac{|A_{ik}|}{g}\,\{P + P^*\}\,do = -\oint \underline{A}^{ik}\,\{(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_i) - (\mathfrak{x}^*\,\mathfrak{x}^*_i)\}\,n_k\,ds.$$

Die Integralformeln erscheinen als sehr naturgemäß, wenn man bedenkt, daß die Integralformeln von Minkowski für konvexe Flächen und andere bekannte Integralformeln aus den Gauss'schen Ableitungsgleichungen, den Codazzigleichungen und dem Satz von Ricci, d. h. aus

$$\mathfrak{x}_{i\,k} = B_{ik}\,\mathfrak{\xi};\quad \underline{B}^{ik}_{\;|k} = 0;\quad g^{ik}_{\;|k} = 0$$

sich in gleicher Weise unmittelbar ergeben, wie die angegebenen Integralformeln aus

$$\mathfrak{x}_{i\,k} = B_{ik}\,\mathfrak{\xi};\quad \underline{A}^{ik}_{\;|k} = 0.$$

IV. Die eindeutige Bestimmung von Flächen bei gegebenen g_{ik}.

Satz 5. (Identitätssatz für Eiflächen). *Zwei isometrisch aufeinander abgebildete Eiflächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$, die dreimal stetig differenzierbar sind mit $K > 0$, sind entweder kongruent oder symmetrisch im dreidimensionalen euklidischen Raum.*

Beweis. Da $K > 0$, besitzen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ je mindestens einen Punkt im Innern. Da es auf die relative Lage der Flächen nicht ankommt, können wir die beiden Punkte in den Ursprung des Koordinatensystems legen. Wenn ξ und ξ^* die nach innen weisenden Normalen von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ sind, so ist $P = (\mathfrak{x}\,\xi) \leqq 0$ und $P^* = (\mathfrak{x}^*\,\xi^*) \leqq 0$. Für geschlossene Flächen vom Geschlecht 0 lautet die Integralformel (III. 7)

$$\int\int \frac{A_{ik}}{g}\,\{P + P^*\}\,do = 0.$$

Wegen $K > 0$ ist die Voraussetzung des Satzes 1 erfüllt, und $A_{ik} \leqq 0$ auf der gesamten Eifläche $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}^*$. Da $P + P^* \leqq 0$ ist, so ist der Integrand der vorstehenden Formel stets $\geqq 0$. Da $P \not\equiv 0$ und $P^* \not\equiv 0$, folgt auch $P + P^* \not\equiv 0$ (wegen $P \leqq 0$; $P^* \leqq 0$), also muß $A_{ik} = 0$ sein im gesamten Integrationsgebiet. Satz 2 läßt daraus aber folgen

$$A_{ik} = 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differentialgeometrie sind dann aber die Eiflächen modulo den orthogonalen Transformationen des dreidimensionalen euklidischen Raumes identisch.

Dieser Satz wurde 1927 zum ersten Male von Cohn-Vossen in den „Göttinger Nachrichten" 1927, Seite 125—135, bewiesen unter der Voraussetzung analytischer Eiflächen. Von Herglotz stammt ein anderer Beweis dieses Satzes in den Abhandlungen des Hamburger Mathematischen Seminars von 1947, Band 15, der im wesentlichen dem hier gegebenen entspricht.

Beide Beweise haben als Voraussetzung $K > 0$. Man kann diese Voraussetzung dahin abschwächen, daß man endlich viele parabolische Punkte auf den Eiflächen zuläßt.

Der Beweis verläuft wie der angegebene. Unter Benutzung von Satz 1 und 3 folgt wieder aus der Integralformel $A_{ik} = 0$ auf den Eiflächen. Nach Satz 2 folgt daraus in den Punkten mit $K > 0$ die Gleichung $B_{ik} = B^*_{ik}$. In den parabolischen Punkten folgt nach Satz 4 $B_{ik} = \lambda\, B^*_{ik}$. Nun sind H und H^* stetige Funktionen auf den Flächen, also auch $H - H^*$. Diese letzte Funktion ist in allen Punkten mit $K > 0$ gleich Null und in den parabolischen Punkten gleich $H^*\{\lambda - 1\}$. Da Flachpunkte nicht auftreten, muß aus Stetigkeitsgründen $\lambda = 1$ sein. Also sind die Eiflächen identisch.

Es sei noch bemerkt, daß man beim Beweis der infinitesimalen Unverbiegbarkeit der Eiflächen parabolische Punkte ausschließen muß.

Wenden wir uns jetzt der Betrachtung von Flächen mit Rändern zu:

Satz 6. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, dreimal stetig differenzierbare Flächen mit Rändern vorgegeben; wobei die Randkurven aufeinander abgebildet werden. In den Flächenpunkten, die nicht auf den Randkurven liegen, sei $K > 0$. In den Randkurven verschwinde die Gauss'sche Krümmung und die Normalkrümmung:*

$$K = 0; \quad b(s) = b^*(s) = 0; \qquad (B_{ik} \neq 0;\ B^*_{ik} \neq 0)$$

d. h. die Randkurven haben die Eigenschaften:

1) *Sie sind ebene Kurven,*

2) *Die Ebene der Randkurven ist Tangentialebene in allen Punkten der betreffenden Randkurve. Dann sind beide Flächen notwendig kongruent oder symmetrisch.*

Beweis. Zunächst sei die Äquivalenz der geometrisch und analytisch formulierten Eigenschaften der Randkurven gezeigt. $K = 0$ und $b = 0$ liefern nach Gleichung (I, 18) auch $a = 0$.

Die Ableitungsgleichungen $\dot{\xi} = b\,\dot{\mathfrak{x}} - a\eta$ besagen dann $\xi = \text{const}$ längs der Randkurve. Dieses hat aber die Eigenschaft 1) und 2) zur Folge. Ebenso folgt aus $\xi = \text{const}$ $a = 0$; $b = 0$ und nach (I, 18) auch $K = 0$.

Wir wenden nun wieder die Integralformel (III, 7) an. Das auftretende Randintegral lautet

$$\int \underline{A}^{ik} \{(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_i) - (\mathfrak{x}^*\,\mathfrak{x}^*_i)\}\, n_k\, ds.$$

Es wird zunächst gezeigt, daß dieses Integral für alle Randkurven verschwindet.

Wegen $K = 0$ längs der Randkurve, gilt:

$$\underline{A}^{ik}\, n_k = \varepsilon^{i\alpha}\varepsilon^{k\beta}\{\mu_\alpha \mu_\beta - \mu^*_\alpha \mu^*_\beta\}\, n_k; \qquad n_k = \varepsilon_{lk}\,\dot{u}^l$$
$$A^{ik}\, n_k = -\varepsilon^{i\alpha}\{\mu_\alpha \mu_\beta - \mu^*_\alpha \mu^*_\beta\}\dot{u}^\beta$$

nach (I, 17) folgt unter der Voraussetzung $K = 0$

$$b(s) = -B_{ik}\,\dot{u}^i \dot{u}^k = -(\mu_i \dot{u}^i)^2.$$

Daher

$$\underline{A}^{ik}\, n_k = -\{\mu_\alpha \sqrt{-b(s)} - \mu^*_\alpha \sqrt{-b^*(s)}\}\,\varepsilon^{i\alpha}.$$

Nun ist aber nach Voraussetzung längs der Ränder $b = b^* = 0$, also $\underline{A}^{ik}\, n_k = 0$, somit auch

$$\int A^{ik}\, n_k \{(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_i) - (\mathfrak{x}^*\,\mathfrak{x}^*_i)\}\, ds = 0.$$

Es ergibt sich wieder aus (III, 7) die Integralformel

$$\int\int \frac{|A_{ik}|}{g}\{P + P^*\}\, do = 0.$$

Denken wir uns die Flächen für den Augenblick durch die von den Rändern begrenzten ebenen Flächenstücke zu einer geschlossenen Fläche ergänzt und den Nullpunkt des Koordinatensystems in das Innere gelegt (es kommt wieder auf die relative Lage der Flächen nicht an), so wird wieder, wenn ξ bzw. ξ^* die „inneren" Flächennormalen sind, $P \leqq 0$; $P^* \leqq 0$. Nach Satz 1 und 3 ist auf den Flächen $\|A_{ik}\| \leqq 0$. Wie eben, ist auch jetzt wieder $P + P^* \leqq 0$. Da $P + P^* \not\equiv 0$, ist $\|A_{ik}\| = 0$ auf dem gesamten Integrationsgebiet. Satz 2 lehrt jetzt für die elliptischen Flächenpunkte

$$B_{ik} = B_{ik}^*$$

und der Satz 4 für die parabolischen Randpunkte

$$B_{ik} = \lambda B_{ik}^*.$$

$H - H^*$ ist auf der gesamten Fläche stetig. In den inneren Flächenpunkten ist diese Funktion überall Null. Auf den Rändern gleich $H^* \{\lambda - 1\}$. Daher muß aus Stetigkeitsgründen $\lambda = 1$ sein[4]). Dann gilt überall $B_{ik} = B_{ik}^*$. Die Flächen sind also identisch bis auf orthogonale Transformationen. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann natürlich, wie bei den Eiflächen, in endlich vielen inneren Flächenpunkten $K = 0$ zulassen.

Sowohl die Eiflächen, als auch die eben behandelten Flächenklassen haben eine Eigenschaft gemein; sie haben nämlich beide die gesamte Einheitskugel als sphärisches Normalenbild. Es gibt aber auch Flächen, die kein geschlossenes Normalenbild haben und dennoch bei Übereinstimmung der g_{ik} und gewissen Bedingungen der Ränder bis auf orthogonale Transformationen identisch sind.

Satz 7. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, dreimal stetig differenzierbare Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ mit geschlossenen Randkurven vorgegeben. (Die Randkurven sollen ebenfalls isometrisch aufeinander abgebildet sein.)*

Weiter sei längs den Randkurven

$$a = a^* \not\equiv 0; \quad b = b^* \not\equiv 0 \text{ [5])}.$$

In den Flächenpunkten, die nicht auf den Rändern liegen, sei $K > 0$. In den Randpunkten sei $K \geqq 0 (B_{ik} \neq 0)$. Es gebe zu jeder der beiden Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ mindestens einen Punkt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^*$, so daß

$$(\mathfrak{x}(u^k) - \mathfrak{a})\xi \leqq 0 \text{ und } (\mathfrak{x}^*(u^k) - \mathfrak{a}^*)\xi^* \leqq 0$$

ist für alle Flächenpunkte. Dann sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ notwendig kongruent oder symmetrisch.

[4]) H^* und H sind in Punkten mit $K = 0$ stets von Null verschieden, da wir Flachpunkte ausschließen.

[5]) Der Fall $a = a^* = 0$; $b = b^* = 0$ wurde im Satz 6 behandelt.

Beweis. Es wird zunächst der Hilfssatz bewiesen:

Es sei $a = a^*$ und $b = b^*$ längs den Randkurven zweier isometrisch abgebildeter Flächenstücke. Dann gilt für diese Randkurven

$$A_{ik}\,\dot{u}^k = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{A}^{ik}\,n_k = 0.$$

Wegen $a - a^* = 0$ und $b - b^* = 0$ gilt längs den Randkurven

$$A_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = 0; \quad A_{ik}\,\dot{u}^i\,n^k = 0.$$

Setzt man $h_k = A_{ik}\,\dot{u}^i$, so schreiben sich die beiden Gleichungen als

$$h_k\,\dot{u}^k = 0; \quad h_k\,n^k = 0,$$

weil $\varepsilon_{ik}\,\dot{u}^i\,n^k = 1 \neq 0$, so ist $h_k = 0$, d. h.

$$A_{ik}\,\dot{u}^i = 0.$$

Da $\dot{u}^i = \varepsilon^{ik}\,n_l$ ist, folgt nach Multiplikation mit ε^{lr} aus $A_{ik}\,\dot{u}^i = 0$ auch

$$\underline{A}^{lr}\,n_l = 0.$$

Wenden wir jetzt den Integralsatz (III, 7)

$$\iint \frac{|A_{ik}|}{g}\,\{P + P^*\}\,do = -\oint \underline{A}^{ik}\,n_k\,\{(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_i) - (\mathfrak{x}^*\,\mathfrak{x}_i^*)\}\,ds$$

auf unsere Flächenstücke $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}^*$ an, so gilt nach dem bewiesenen Hilfssatz

$$\iint \frac{|A_{ik}|}{g}\,\{P + P^*\}\,do = 0.$$

Da es wiederum auf die relative Lage von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ nicht ankommt, bringen wir $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ durch Bewegungen in eine solche Lage, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* = 0$ wird. Danach ist aber

$$P = (\underline{\mathfrak{x}}\,\underline{\xi}) \leqq 0; \quad P^* = (\underline{\mathfrak{x}}^*\,\underline{\xi}^*) \leqq 0.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist wieder der Integrand positiv und $P + P^* \not\equiv 0$. Es muß also wieder $|A_{ik}| = 0$ sein. Für Flächenpunkte, in denen $K > 0$ ist, zieht dies wieder $B_{ik} = B_{ik}^*$ nach sich. $K = 0$ kann nur längs Randkurven auftreten. Dort gilt dann nach Satz 4

$$B_{ik} = \lambda\,B_{ik}^*.$$

$a = a^* \not\equiv 0$ und $b = b^* \not\equiv 0$ liefern aber längs den Randkurven $\lambda = 1$, denn aus $B_{ik} = \lambda\,B_{ik}^*$ folgt $a = \lambda\,a^*$; $b = \lambda\,b^*$. Wie bei den Eiflächen kann man natürlich auch hier in endlich vielen Flächenpunkten, die nicht auf dem Rande liegen, $K = 0$ zulassen.

Es sei noch bemerkt, daß wegen der isometrischen Abbildung der Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ längs den Randstreifen auch $c = c^*$ ist. Aus $a = a^*$; $b = b^*$; $c = c^*$ folgt aber nach dem Hauptsatz der Theorie der Flächenstreifen[6]) die Identität der Flächenstreifen bis auf orthogonale Transformationen.

---

[6]) Blaschke: Differentialgeometrie Bd. I, 4. Aufl., S. 69.

Unter gewissen Voraussetzungen brauchen die Randstreifen von vornherein zunächst nicht kongruent oder symmetrisch zu sein, um die Identität der Flächenstücke nach sich zu ziehen.

Satz 8. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, dreimal stetig differenzierbare Flächen mit je einem Rand vorgegeben. (Diese werden wieder aufeinander abgebildet.) In den inneren Flächenpunkten sei* $K > 0$. *In den Randkurven ist* $K \geqq 0$ *zugelassen. Die Randkurven mögen die Eigenschaft haben: Im Inneren der kleinsten konvexen Hülle jeder Fläche gibt es einen Punkt, so daß die Flächennormalen der Randkurve durch diesen Punkt gehen. Oder analytisch ausgedrückt: Längs den Randkurven muß gelten*

$$a = 0; \quad b = \text{const} \leqq 0; \quad a^* = 0; \quad b^* = \text{const} \leqq 0.$$

Weiter sei die Stützfunktion P *(und* P^**) für die eben definierten Punkte nicht positiv:* $P \leqq 0$; $P^* \leqq 0$. *Dann sind die beiden Flächen notwendig kongruent oder symmetrisch.*

Ein einfaches Beispiel einer solchen Fläche ist ein Rotationsellipsoid, welches längs eines Breitenkreises abgeschnitten ist. Der Schnittpunkt der Flächennormalen liegt dann auf der Rotationsachse.

Beweis. Zunächst werde die Äquivalenz der Formulierungen der Eigenschaften der Randkurven nachgewiesen:

Die erste Formulierung besagt die Existenz der konstanten Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^*$ der Eigenschaft, daß die Gleichungen

$$\mathfrak{x} + \varrho\,\mathfrak{\xi} = \mathfrak{a}; \quad \mathfrak{x}^* + \varrho^*\,\mathfrak{\xi}^* = \mathfrak{a}^*; \qquad \varrho \geqq 0; \; \varrho^* \geqq 0$$

längs den Randkurven gelten. Durch Differentiation nach der Bogenlänge der Randkurve folgt

$$\dot{\mathfrak{x}} + \dot{\varrho}\,\mathfrak{\xi} + \varrho\,\dot{\mathfrak{\xi}} = 0$$

(analog für die Sterngrößen).

Die Ableitungsgleichungen (I, 16c) liefern

$$\dot{\mathfrak{x}}\{1 + \varrho\, b\} - \eta\, a\, \varrho + \dot{\varrho}\,\mathfrak{\xi} = 0,$$

daher

$$a = 0; \quad \dot{\varrho} = 0; \quad 1 + \varrho\, b = 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $b \neq 0$ annehmen, da dieser Fall im Satz 6 behandelt wurde. Dann ist aber

$$\varrho = -\frac{1}{b} = \text{const}$$

und wegen $\varrho \geqq 0$ gilt $b < 0$.

Umgekehrt folgt sofort aus $a = 0$ und $b = \text{const} < 0$ über die Ableitungsgleichungen

$$\dot{\mathfrak{\xi}} = b\,\dot{\mathfrak{x}} - a\,\mathfrak{\eta}$$

die Beziehung

$$\mathfrak{x} + \varrho\,\mathfrak{\xi} = \mathfrak{a} = \text{const}.$$

Die gleiche Betrachtung gilt auch für die „Sterngrößen". Wenden wir jetzt die Integralformel (III, 7) an, so wird das Randintegral

$$\oint \underline{A^{ik}}\, n_k \{(\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}_i) - (\mathfrak{x}^*\, \mathfrak{x}_i^*)\}\, d\, s$$

verschwinden, da längs des Randes $\mathfrak{x} = -\varrho\, \mathfrak{\xi}$ bzw. $\mathfrak{x}^* = -\varrho^*\, \mathfrak{\xi}^*$ gilt, wenn wir die beiden Flächen so transformieren (durch orthogonale Transformationen), daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^*$ in den Ursprung des Koordinatensystems fallen. Dieses ist möglich, da uns die gegenseitige Lage der Flächen nicht interessiert. Es verbleibt von der Integralformel wiederum nur

$$\int\int \frac{|A_{ik}|}{g}\, \{P + P^*\}\, do = 0.$$

Wegen $K > 0$ und $P + P^* \leqq 0\ (\not\equiv 0)$ folgt daraus wie bei den beiden vorhergehenden Sätzen

$$||A_{ik}|| = 0.$$

In den Punkten mit $K > 0$ gilt wieder $B_{ik} = B_{ik}^*$. $K = 0$ liefert längs den Randstreifen nach (I, 18)

$$2\, H\, b + b^2 = 0.$$

Wegen $b \neq 0$ folgt $2H = -b \neq 0$ längs den Randstreifen (analog für die Sterngrößen).

$H - H^*$ ist auf der gesamten Fläche stetig und in inneren Flächenpunkten gleich Null. Aus Stetigkeitsgründen muß dann auch längs den Randkurven $H - H^* = 0$ sein. Wegen $H;\ H^* \neq 0$ gilt also auch hier

$$B_{ik} = B_{ik}^*.$$

Längs den Randkurven sind hier wegen $b(s) \neq 0$ Flachpunkte ausgeschlossen.

Man kann auch hier in endlich vielen Punkten $K = 0$ zulassen. Der letzte Satz gilt auch für solche Flächen, die die Voraussetzung des Satzes erfüllen und endlich viele Randkurven der geforderten Art haben. Allerdings müssen dann die Flächennormalen aller Randkurven durch denselben Punkt im Inneren der konvexen Hülle der betreffenden Fläche gehen.

Es sei noch bemerkt, daß die Randkurven mit $a = a^* = 0$ und $b = b^* = 0$ des Satzes 6, des Satzes 7 mit $a = a^*;\ b = b^*$ und des Satzes 8 mit $a = a^* = 0;\ b = \text{const};\ b^* = \text{const}$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung genügen:

$$A_{ik\ l}\, \dot{u}^i\, \dot{u}^k\, \dot{u}^l = 0,$$

denn es gilt die Gleichung

$$(\dot{b} - \dot{b}^*) + 2\,(a - a^*)\, c = -A_{ik\ l}\, \dot{u}^i\, \dot{u}^k\, \dot{u}^l.$$

Alle diese Sätze über die Identität isometrischer Flächenpaare lassen sich auch im Rahmen der endlichen Flächenverbiegung aussprechen:

Der Satz 5 besagt jetzt unter den gegebenen Voraussetzungen die endliche Starrheit der Eiflächen; denn angenommen, die Eiflächen seien nicht starr, dann gäbe es eine zweite mit gleichem g_{ik}, aber anderem B_{ik}. Diesen Fall schließt aber der Satz 5 aus.

Ebenso besagen die Sätze 6, 7 und 8 die Starrheit gegenüber endlichen Verbiegungen von Flächen mit Rändern, wenn diese ihre Eigenschaft beibehalten sollen.

Zum Beispiel ist dann eine Kugel, aus der man eine Kalotte herausgeschnitten hat, solange gegenüber endlichen Verbiegungen starr, als man die Randkurven eben läßt (und die Flächennormalen längs dieser Kurve durch einen festen Punkt gehen).

Auch das „Äußere" eines Torus mit ebenen Rändern ist gegenüber endlichen Verbiegungen starr, solange die Ränder ihre Eigenschaft behalten.

(Eingegangen am 26. Juli 1951.)